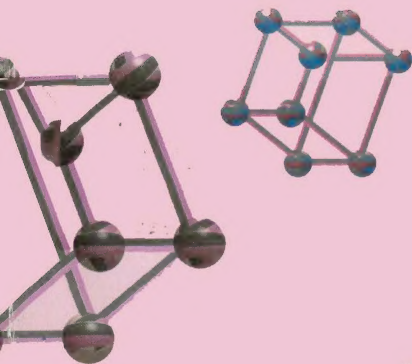
世界数学名题欣赏



哥德尔不完全性定理



辽宁教育出版社

世界数学名题欣赏丛书

费马猜想
黎曼猜想
连续统假设
希尔伯特第十问题
欧几里得第五公设
哥德尔不完全性定理
不动点定理
无处可微的连续函数
科克曼女生问题
斐波那契数列
哥德巴赫猜想
置换多项式及其应用
素数判定与大数分解

责任编辑：俞晓群
谭　坚
封面设计：李国盛
李　飞

本书荣获1988年中国

首届优秀教育图书一等奖

世界数学名题欣赏丛书

哥德尔不完全性定理

朱 水 林 编著

辽 宁 教 育 出 版 社

1995年·沈阳

图书在版编目(CIP)数据

哥德尔不完全性定理/朱水林编著.—沈阳:辽宁教育出版社,1995重印

(世界数学名题欣赏丛书)

ISBN 7-5382-0179-3

Ⅰ.哥…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.哥德尔不完全性定理

Ⅳ.015

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第16517号

哥德尔不完全性定理

朱水林　编著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

(沈阳市北一马路108号)　沈阳市第二印刷厂印刷

字数:107,000　开本:787×1092 1/32　印张:6 7/8　插页:4

印数:6,871—10,870

1987年11月第1版　1995年12月第3次印刷

责任编辑:俞晓群　谭　坚　责任校对:理　俞

封面设计:李国盛　李　飞　插　图:安　迪

ISBN 7-5382-0179-3/G·160

定　价:7.30元

每函十三册,总定价:90.00元

库尔特·哥德尔在现代逻辑方面的成就是无与伦比的、不朽的——确实，它们不只是一座纪念碑，而且是一座其意义由于受时间、空间限制还远未显现的里程碑。……由于哥德尔的成就，逻辑学科已完全改变了它的本性和发展前景。

冯·诺依曼

（1951年在授予哥德尔爱因斯坦勋章时的讲话）

内 容 简 介

本书是“世界数学名题欣赏丛书之一”。哥德尔是德国著名数学家，不完全性定理是他在1931年提出来的。这一理论使数学基础研究发生了划时代的变化，是现代逻辑史上的一座里程碑。本书系统地介绍了哥德尔不完全性定理的产生、发展和理论，讲述了哥德尔的思想方法以及该定理的重要地位。全书从问题产生的历史背景出发，引入了现代逻辑学的必备知识，最后给出了定理优美的证明。通篇严谨简明、一气呵成。

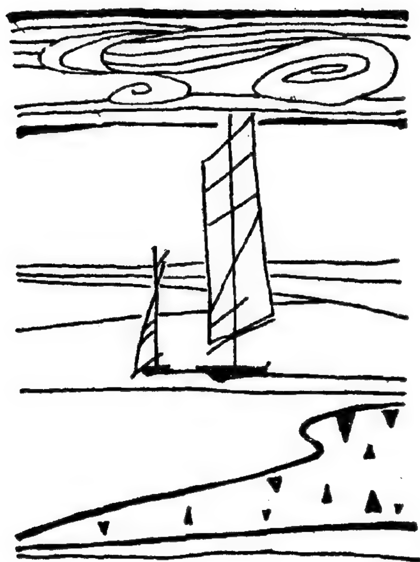
Summary

This book is one of A Series of World Famous Mathematics Appreciation. Cödel was a famous mathematician who advanced the incomplete theorem in 1931. The theory is a milestone in the history of modern logic, has brought about epoch-making changes in basic research of mathematics. The book systematically introduces the birth, development and theories of Gödel incomplete theorem, and sets forth Gödel's method of thinking and the important place of the theorem. It proceeds from the historical background of the problem and introduces necessary knowledge of modern logic, and finally gives proofs to the theorem. The whole book is well-knit and brief, forms a coherent whole.

目　录

Contents

一 引 言



库尔特·哥德尔于1931年发表了一篇重要论文:《论数学原理和有关系统Ⅰ的形式不可判定命题》. 文章证明了一条后来以他的名字命名的不完全性定理. 定理说：在任何包含初等数论的相容的形式系统中，存在着不可判定命题，即命题本身和它的否定在该系统中都不可证. 考虑到二值逻辑中，命题和它的否定必有一真，不可判定命题是真的，为此不完全性定理实际上断言了在上述系统中存在着真的不可证命题. 这种表述通常称为哥德尔第一定理.

该定理可以有一推论：一个包含初等数论的形式系统的相容性,在该系统内是不可证明的. 这个表述通常称为哥德尔第二定理.

哥德尔定理是现代逻辑发展史上的一座丰碑，一个转折点，它开创了现代逻辑发展的新时期. 哥德尔的不完全性定理和塔斯基的形式语言的真理论及图灵机和判定问题的理论，已被国际逻辑界赞誉为现代逻辑的三大成果. 本书仅就哥德尔定理的背景、内容、证明、意义等作一较为

系统的叙述.

1 哥德尔的生平

大家都知道亚里士多德（公元前 384—322）是古希腊最伟大的思想家. 他创建了古典的形式逻辑，被西方称为“逻辑之父”. 有人认为，现代能与亚里士多德相比的逻辑学家，恐怕只有哥德尔. 伟大的思想家的生活往往会被他们的成果掩盖，这个现象在哥德尔那里恐怕最为典型了. 哥德尔这位隐居的天才，尽管他的不完全性定理等成果，是二十世纪数学、逻辑学领域中最值得称颂的部分，然而他的个人生活和经历至今却仍然鲜为人知.

哥德尔全称库尔特·弗里德里希·哥德尔（Kurt Friedrich G ödel）于 1906 年 4 月 28 日生于摩拉维亚（Moravia）的布吕恩（Brünn），那时它是奥匈帝国的一部分，现今已是捷克斯洛伐克的波绿因（Brno）. 他是鲁道夫（Rudolf）和玛丽安娜（Marianna）·哥德尔的第二个孩子. 当时布吕恩是重要的纺织中心，库尔特的父亲是弗里德里希·雷德利希（Redlich）纺织厂厂长. 雷德利希本人是库尔特的教父，后来被纳粹分子杀害. 大概孩子的中间名字是由他而来的. 哥德尔加入

美国籍后，正式去掉了中间名字，但在墓碑上还保留了那个开头的字母“F”．哥德尔出生在贝克街5号，在布吕恩的德国路德教会中受洗礼．家庭生活水平中等．哥德尔的种族并不像有些人（如哲学家罗素）所断定的那样，属于犹太人．哥德尔的父母虽都出生在布吕恩，但当时那里是日耳曼居民区，儿童受德语教育，库尔特也一样．在他成为维也纳大学学生后，放弃了捷克公民权．

哥德尔是个勤奋而杰出的小学生．他第一次算术作业中，只有一处计算错误．他所学的课程着重放在科学和语言上，拉丁语和法语必修，他还选修了英语．总的来说，他幼年对语言似乎很有兴趣．藏书中除许多外文词典外，还有意大利语、荷兰语等的词汇表和练习本．哥德尔的成绩单上，数学几乎都为最高分．成绩单也记录了他相当多的缺席．其中包括1915—1916年间和1917—1918年间物理课程的免修．其原因也许就是患小儿风湿症．他哥哥认为，这个疾病是哥德尔后来患疑病的根源．

哥德尔十四岁那年由于读了著名的格申(G öschen)丛书中的一本初等微积分教科书，对数学开始产生了兴趣．1924年高中毕业后，他离开了出生和度过少年时代的令人怀念的家乡，来到了维也纳，在维也纳大学攻读物理学．进大学

前，他除了通过读《新自由新闻》报以外，几乎与维也纳的知识文化生活没有什么接触．在第一次世界大战以及战后，通货膨胀几乎对他的家庭没有影响．他虽然参与宗教活动，但从未加入过任何一个教会，他认为自己是有神论者而不是泛神论者，“追随莱布尼茨而不追随斯宾诺莎”．

进大学后，菲利普·富特温格勒（Philipp Furtwangler）的数学课和海因里希·贡佩兹（Heinrich Gomperz）的哲学史课马上吸引了他．由于他对精确性十分感兴趣，终于促使他从物理学转向数学，转向数理逻辑．当时，他就曾应用中国剩余定理去表述按加法和减法表示的递归函数，发展这方面的兴趣．几乎同时在汉思·韩恩（Hans Hahn）的引导下，大约于1926年参加过维也纳学派的讨论活动，成为石里克团体的一名成员．在讨论中，特别活跃的有：在物理学研究工作中取得成就的卡尔纳普（R. Carnap）和石里克，两位数学教授汉思·韩恩和卡尔·门格尔（Karl Menger），哲学家弗里德里希·魏斯曼（Friedrich Waisman），社会学家奥托·纽拉特（Ott Neurath），以及后来成为第一个移居美国的维也纳学派成员哲学家赫伯特·费格尔（Herbert Feigl）．届时卡尔·波普尔（Karl Popper）也在维也纳，他和卡尔纳普、纽拉特以及其他一些人活跃

地、富有成效地交换着意见．但是波普尔所强调的是他和逻辑经验主义的不同点，他不可能当然也不愿意把自己算做逻辑经验主义者．哥德尔也是讨论班的活跃参加者，尽管他没有明显持与逻辑经验主义者对立的立场，但就哲学思想而言两者并不一样．他同意维也纳学派对当时哲学是贫乏的估价，并且大体上也同意他们使用数理逻辑方法去分析哲学和科学的概念，但是对他们否定客观实在性的态度及认为形而上学（哲学）问题是无意义的观点，哥德尔看来是不同意的，后来他痛苦地与他们脱离了关系（这在哥德尔身后遗留的一些未发表的信件中可以看到）．

大约在这个时期，哥德尔读了希尔伯特（Hilbert）和阿克曼（Ackerman）合著的第一版《理论逻辑基础》（1928）一书，书中精确地叙述了狭谓词演算的完全性[①] 概念，并明确地把它作为一个尚未解决的问题提出．希尔伯特、阿克曼写道："这个公理系统是否完全？这里完全的意思是指至少要求在每个个体域中皆真的所有逻辑公式，都能从这个公理系统推导出来．这个完全性问题仍然悬而未决"．哥德尔集中精力钻研了这个

① 本书把这种意义下的完全性，称为完备性，以区别于不完全性定理．

问题．他善于围绕能加以精确处理，且能获得永久性成果的基本概念问题进行卓越探索的能力，使他通过“纯思维的”活动，成功地取得了基本的进展．这里的所谓纯思维活动，在很大程度上是指独立于以前已有的专门知识的思想，现在的说法就是指创造性思维．哥德尔对这个问题的完美解答，以博士论文形式作为成果，1929 年他完成了论文，随即获得通过．在他父亲不到五十五岁就逝世的前几天，即 1930 年 2 月 6 日，由维也纳大学授予哥德尔数学博士学位．他的稍事改动的论文稿，于 1930 年发表在《月刊》上，名称是《关于逻辑函数演算公理的完全性》．

1930 年夏天，哥德尔已经开始研究分析的(即实数的）相容性的证明问题．他感到希尔伯特想用有穷方法去直接证明这个问题，有点不可思议．哥德尔总是这样认为，人们应该把困难加以分割，使得分割后的每一部分，相对地都能较容易克服一些．对这个特殊的问题，他也想如此处理．想用有穷数论去证明数论的相容性，再用数论的相容性去证明分析的相容性．他用数论中的公式去表示实数，此时他发现为了去证实分析中的全部公理，必须使用数论中语句的真值概念．这样很快就达到了与真值和可定义性有关的悖论(莱奥悖论和理查德悖论）．于是，他渐渐认识到

了尽管在数论中可以定义可证明性概念，但是不能定义语句的真值概念，这促使他没有再想去实现证明分析相容性的计划. 不久导致他的不完全性定理的证明. 他作出了如下的结论：在如同数学原理（类型论）和集合论（策麦罗—弗兰克尔）那样的、适当丰富的形式系统中，存在着不可判定命题. 这个证明无情地推翻了希尔伯特证明论的规划（至少是最初的设想）.

1930 年 9 月，哥德尔参加了哥尼斯堡会议. 那次会议大数学家云集，盛况空前. 希尔伯特，海丁（Heyting），卡尔纳普，冯·诺依曼都参加了. 希尔伯特在一般会议上作了逻辑和自然的讲话，哥德尔去听了。这是哥德尔第一次见到希尔伯特，也许就是唯一的一次. 哥德尔在一次关于数学基础讨论的会议期间，临结束时几乎漫不经心地宣布了他那历史性的发现——不完全性定理. 反应接踵而来，但并不总是伴随着理解. 有冯·诺依曼的深情赞赏（他在两个月后，几乎抢先发现哥德尔第二不完全性定理），有策麦罗的强有力的批评. 还有一位芬斯勒（Finsler）竟宣称是他先作出这一发现.

冯·诺依曼是一位多才多艺的现代数学家，他在逻辑学、气象学、量子物理学、计算机、对策论等方面都作出过重大贡献. 有“电子计算机

之父"之称. 世界著名的数学家乌拉姆 (S. M. Ulam) 曾评价他说:"按年代循迹冯·诺依曼的兴趣和成就，那就是对近三十年（本世纪三十年代到五十年代）来整个科学发展的大部分内容的一次回顾."冯·诺依曼对人对己要求甚严. 他得知哥德尔的发现后，凭他的高度数学修养，直接感觉到不完全性定理的深刻性和重要意义，故立即以深知内情的同行身份赞扬了哥德尔. 冷静下来以后，作为一个大数学家的冯·诺依曼由于认识到定理太为重要了，总有点不放心，因此自己要验证这条定理. 据说，在不长的时间里，他曾两次找出并宣布哥德尔证明中的错误，后来又两次修正自己的错误. 后来，冯·诺依曼自己曾对这段经历有过说法：哥德尔发现不完全性定理这件事发生在我们生活的时代，我惭愧地看到自己，怎样轻易地由这个插曲而改变关于绝对的数学真理的看法，而且相继改变了三次.

这里冯·诺依曼表现了大科学家风度，既热情又严格，既有开拓精神又尊重事实. 同时我们也受到了启示，对哥德尔的盛赞并非廉价的.

叙述哥德尔这个成果的摘要由韩恩教授于1930年10月23日提交维也纳科学院. 载满盛誉的文章《论数学原理和有关系统 I 的形式不可判定命题与论完全性和一致性》于 1931 年发表在

《月刊》杂志上. 在注有日期1931年1月22日的说明中，哥德尔用皮阿诺（Peano）算术而不是用类型论作为基本系统，对他的定理给出了一个更为一般的阐述. 后来哥德尔把它作为申请大学授课资格的论文，递交给维也纳大学，并因此得了"无薪讲师"的职位. 届时，他还积极参加卡尔·门格尔（Karl Menger）的讨论班，在那儿他宣读了许多论文，并与别人合作编辑了讨论会会议录《一个数学讨论会的成果》.

哥德尔在1933年至1938年间在维也纳大学任职. 实际上在大学的授课时断时续，其原因或是因为去美国访问，或是生病. 据记录他在维也纳大学真正讲授的只有三门课：1933年夏讲了算术基础，1935年夏讲了数理逻辑部分章节，1937年春讲了公理集合论.

哥德尔出访美国的时间，各种回忆录的说法不太统一. 事实上在哥德尔于1940年移居美国之前，已三次访问了美国，第一次是在1933年至1934年间，他访问了普林斯顿高等研究院，在那里讲授了不完全性定理. 大约耽了一学年，这一年恰是高等研究院开办的第一年，还没有自己的房子，对应邀来访的学者授予什么职衔还有待决定. 因此，在那一年的研究院院报上只是把哥德尔列为"工作人员". 4月份，哥德尔分别到纽约

和华盛顿旅行时，为纽约哲学学会和华盛顿科学院讲了课. 回欧洲后，哥德尔得了神经衰弱症，不得不推迟了应邀在1934到1935年度第二学期去高等研究院的讲学. 此时，他开始深入集合论方面的研究. 1935年10月，他第二次访问高等研究院时，曾对冯·诺依曼讲述他关于选择公理相容性的证明. 由于工作过度，神经衰弱症发作，只能于一个月后辞职，由维布伦（O. Veblen）在纽约把他送上回欧洲大陆的船只，1938年秋，他第三次访问美国，在高等研究院过了一个学期，尔后接受门格尔的邀请，到了圣母大学，在两地他都讲授了有关相容性的结果.

1939年9月20日，在他准备动身第四次访美前两星期，他与阿黛尔·尼姆伯斯基（Adele Nimbursky，娘家姓 Porkert）在维也纳结了婚. 尽管他们相识已有十年，由于阿黛尔是个离婚女子，曾是舞蹈演员，脸上有胎记等，且比哥德尔年长，婚事一直受到哥德尔家庭的反对而延迟. 不过后来的事实证明他们的结合是永久性的. 由于纳粹当局把他作为征兵对象，哥德尔于11月写信给维布伦，表示同预料相反，“我被征集并被认为适合充当警卫工作.”后来，通过某种途径哥德尔躲避了审查，成功地获得了出境签证. 于是，1940年1月他与阿黛尔，经过苏联和中国东北之后，取道

横滨，横渡太平洋，到旧金山时已是1940年3月4日了. 不管怎样，哥德尔终于在高等研究院找到了安心做学问的避难所.

哥德尔于1932年曾访问过哥庭根，会见过薛格尔（Siegel），甘芩（Gentzen），诺特(Nother)，也许在这里还会见过策麦罗. 他没有直接见到豪伯（Herbrand)，和豪伯通过信，不过在哥德尔的第二封信尚未到达他手中时，豪伯已逝世了. 在普林斯顿早期，他与丘奇（A. Church)，克林尼（S. C. Kleene）相见甚多，与罗塞尔（Rosser）也经常相见.

在1925年希尔伯特已经提出过旨在公理集合论ZF系统中证明连续统假设的概要，哥德尔直到1930年才听到这个证明概要. 他感到人们不必用构造方法去建立层次. 他看到了，希尔伯特并不相信连续统假设可以在公理集合论ZF系统中判定. 1935年哥德尔用这个方法，作出了选择公理相对无矛盾性的证明. 1938年，哥德尔把它推广到今天已为人们熟知的领域，他引入了可构造性公理，并且证明了广义连续统假设的相对无矛盾性. 有关结果和报告递交给了美国国家科家院院刊，并于1938年底前发表. 长期以来有种说法：在四十年代初期，哥德尔已经得到了选择公理独立性的证明，只是没有发表. 特别是1964年

科恩(Cohen)得到证明后，莫斯托夫斯基曾断言："1938年以来人们就知道，哥德尔得到了这个假设的独立性证明；尽管有许多人问及此事，但他决不暴露秘密."不过哥德尔在给沃尔夫冈·劳滕贝格（Wolf gang Rautenbeng）的信中特别指出过："莫斯托夫斯基在这点上的断言是不对的，因为我只得到了某些部分结果，即在类型论中证明了可构造公理和选择公理的独立性．根据我那时(1942年)极不完全的记录，我只能没有困难地重新写出这两个证明中的前一个．我的方法非常近似于达纳·斯科特(Von Dana Scott)最近所发现的方法，也有一点像科恩的."尽管如此，人们对哥德尔取得部分结果的方法仍然感到兴趣.

哥德尔在科学方面的伟大贡献，有一点在科学史上是罕见的．这就是在归纳和提出某一科学领域的中心问题之后的短期内，由一个人解决了所有的基本问题．1928年国际数学家大会上，希尔伯特开列了关于数学基础的四个未解决的中心问题：用"有穷论"方法证明分析的相容性；把相容性证明推广到实复函数，特别是关于选择公理的相容性；数论和分析的形式系统的完全性；一阶逻辑的完全性．所有这些在不多几年里，都由哥德尔作出了明确的解答.

哥德尔到了普林斯顿后，高等研究院给了他

相应的工作条件．然而他一直是每年需要重新聘请的人员，直到1946年，才成为永久成员．在他加入美国籍五年之后，即分享第一届爱因斯坦奖金两年之后，才被提为教授．尽管哥德尔本人对这种长期的拖延没有表示过不满，但是别人则要求对此作出解释，特别是斯坦尼斯劳·乌拉姆（Stanislaw Ulam）等．不过研究院还是创造了条件，让哥德尔能广泛地追求自己的学术兴趣，给哥德尔以学术研究的充分自由．

1943年以后直到1978年逝世，哥德尔主要从事哲学研究．1942年前后，他写了论文《罗素的数理逻辑》，这可能是他的研究生涯转折的标志．这是应希尔普（P. A. Schilpp）之邀，为《当代哲学家丛书》写作的．希尔普还曾要他为爱因斯坦，卡尔纳普，波普的分卷写论文，除波普外，哥德尔都同意写，不过他对每一篇都十分仔细，他的文章总在最后收到之列，以至当他有关罗素的论文交稿时，已无法听取罗素本人的意见了．《罗素的数理逻辑》一文，据哥德尔自己说是针对罗素工作中的逻辑史的．其实文章对罗素的哲学观点，特别是数理哲学观点作了多方面的述评，从而文章也反映了哥德尔本人的哲学思想．另一篇哲学论文《康托连续统问题是什么?》，发表于1947年，该文部分地意味着是哥德尔对自己在

这个问题上数学工作的终结. 文章结合分析连续统问题，在哲学特别在数理哲学方面提出了一些独特的见解. 此时，可以看到哥德尔集中注意于数理逻辑研究的情况已经产生了变化，已经转向一种基本上是哲学的理论兴趣. 哥德尔曾对莱布尼茨、康德哲学产生过兴趣，也曾写过题目为相对论和康德哲学之间关系的某些考察. 1950 年开始读胡塞尔的哲学. 尽管哥德尔后半生曾花了大量时间去探索某种基本哲学，企求这种基本哲学不仅会有助于一切领域内的科学研究，而且本身也应成为一门超科学(Superscience)，并且还乐观地估计过这种哲学的发展前途. 但最终成果却很有限，甚至也没有成形. 照他自己的说法，在他那里这种哲学只发展到应用的程度，而未发展到能加以直接表述的程度. 看来，在哲学方面，哥德尔没有能达到他所追求的目标：获得一种对世界、世界的基本成分以及构成规则的新观点.

总之，哥德尔一生的研究工作，大体可划分为两个时期. 第一时期：从 1929 年到 1941 年前后，是数理逻辑研究时期. 主要从事逻辑学领域内基本理论方面的建设工作. 这一时期他取得了具有深远意义的包括完备性定理、不完全性定理在内的几项重大成果，这些成果对阐明关于证明、公理化方法、机械程序、集合、连续统、数学真

理、逻辑真理和直觉主义方法等一些根本性的概念和定理，起到了决定性的作用．第二时期：从1941年前后到1978年逝世，是哲学研究时期．还可分得细一点，1941—1958年间为数学和物理哲学研究时期，1959—1978年间为一般哲学研究时期．发表的文章不多，但有不少哲学遗稿，现在正在整理发表．无疑将为哥德尔研究创造条件．

2. 历史背景

哥德尔不完全性定理，是逻辑学和数学在现代发展中取得高度成就的背景下产生的．

形式逻辑起始于古希腊的亚里士多德．他第一个全面系统地研究了人类的思维规律，他对概念、判断、推理以及基本思维规律作了系统的研究和阐述，构成了传统逻辑的几乎所有组成部分，建立了完整的逻辑学．亚里士多德的逻辑在两千多年的历史发展中经受了考验，作出了广泛的应用，取得了辉煌的成就．但是从近代科学发展的眼光来看，亚里士多德逻辑确实也暴露了不少局限性：诸如研究对象范围过窄，限于主宾式语句，限于三段论，对量词未加研究，等等．随着近代科学的发展，突破传统逻辑的限制，已是必然的趋势．

莱布尼茨（Leibniz，1645—1716）是第一个顺应这种发展的哲学家、科学家．这位和牛顿差不多同时发明微积分的德国著名数学家，一心想使逻辑普遍化．他在年轻时就认为逻辑学可与数学相匹配，因此在他的脑海中迫切想往创造新逻辑．他设想过一个庞大的计划，要建立一种理想的“通用语言”，并利用它来进行推理．具体的想法大体是这样的：所有概念都可归约为几个确定的基本概念，这些基本概念则构成“思想的字母表”，可由基本概念通过相乘、相加得出复合概念，基本概念之间不得自相矛盾，以此出发构造形式的演绎逻辑．他这种努力的动机是：“我们要造成这样的一个结果，使得所有推理的错误都只是计算的错误．这样当争论发生时，两位哲学家和计算数学家一样，用不着辩论，只要手里拿起笔，坐在计算器前，面对面地说让我们来计算吧．”

莱布尼茨自己没有能实现这个愿望．直到二百年后，才由英国著名数学家布尔（G. Boole，1815—1864）给以实现．他终于创建了以他的名字命名的逻辑代数系统．布尔不仅和莱布尼茨一样想到了用数学来表示逻辑，把逻辑中的合取和析取与数值的乘法和加法作了类比，看到了它们之间的相似之处．而且还凭借他在代数学方面的卓越才能，创建了能表示逻辑演算的代数系统，从

而基本上完成了对逻辑加以演算的转化工作．著名的逻辑史专家波亨斯基(Bohenski)曾对此作过评价："我们能够在布尔的划时代著作《逻辑的数学分析》中找到一种示范形式展开的清晰表达，这方面它是优于许多后人的著作的，包括罗素的《数学原理》．"

到了弗雷格（G. Frege，1848—1925），数理逻辑的发展已几乎达到了完成．弗雷格是德国著名逻辑学家，他完备地发展了现代意义下的命题演算，引进了量词和约束变元，并且也几乎完备地发展了谓词演算．在他以前，逻辑学家所考虑的主要是像几何学那样，如何从公理去推出定理，并没有把逻辑学本身也表示成为一个由公理推演出定理的演绎系统．是他首先用公理方法构造了逻辑的演绎系统．但是由于他使用的符号十分难懂，因而他的著作长期不为人们所关注．直到罗素大力提倡后才为人们重视．

罗素是英国现代著名的哲学家、逻辑学家．他在数学基础和数理逻辑两方面的工作，基本上总结了前期的成果，并且和怀特海（A. N. Whitehead，1861—1947）一起作出了许多创造性的贡献，对现代逻辑学的发展起了很大的推动作用．可以这样说，他的工作集现代符号逻辑之大成，为符号逻辑发展的金字塔．他在逻辑史上第一个建

立了完整的两个演算：命题演算和谓词演算. 哥德尔证明不完全性定理的形式系统，就是在怀特海和罗素的《数学原理》中建立的逻辑演算的基础上给以刻画的.

逻辑发展史和数学史表明，逻辑向形式科学发展的历史和数学的公理化、形式化的进程几乎是并肩推进. 数学的公理化、形式化需大量借助逻辑学已取得的成果，同时又以自己的成果哺育逻辑的公理化、形式化. 两者相辅相成，交织共生. 它们大体上都在十九世纪末，二十世纪初达到完成. 时至今日，某些现代的成就，几乎已无法区分究竟该属何种学科，它们既可算作数学的创造，又可当作逻辑学的成果.

数学的公理化、形式化包括代数、几何和数学分析三个方面. 从解方程到抽象代数，从欧几里得直观的公理几何学到希尔伯特的形式公理几何学，从感性直观的无限小到形式的无限小，分别是代数、几何、分析形式化的历程.

早在公元前三世纪，希腊数学家欧几里得已用公理方法撰写了十三卷《几何原本》，影响欧洲文明达数千年之久. 由于对书中第五公设的探讨研究，导致十九世纪非欧几里得几何学的诞生，这成就显示了公理学研究的威力. 尽管欧氏几何《原本》在历史上堪称公理方法的楷模，但用现代

的眼光来看，存在问题还是不少的. 例如，作为逻辑推理基础的基本命题过于贫乏，在证明中常要借用图形的直观，如移动、通过等. 总之，欧几里得逻辑的说服力，在许多情况下要由我们的空间观念的习惯所保证，直到十九世纪末，在几何学发展的推动下，由希尔伯特于 1899 年发表的《几何基础》才完成几何学公理化、形式化的严格陈述. 希尔伯特重新定义了几何元素，确定了五组 20 个公理，它们分别是 8 条关联公理，4 条顺序公理，5 条合同公理，2 条连续公理和 1 条平行公理.《几何基础》用准确的语言，严格地叙述了欧几里得几何学的内容，克服了欧氏几何在逻辑上的欠缺.

古代尽管已有解决某种类型的数学问题的法则，不过“代数”这个词最早是由九世纪的阿拉伯学者穆罕默得·阿里·花剌子模，作为他的重要著作的书名提出的，书中已有第一个解一次及二次方程的一般性法则. 字母表示法的引进通常和维耶特的名字相联. 这时实际上把代数看成是关于字母的计算，关于由字母构成的公式的变换以及解代数方程的学问. 十九世纪中叶才形成方程理论，尽管当时发现了大量方法，使得它不仅能够处理实数和复数问题，而且还能处理向量、四元数、矩阵、二次型、超复数、变换等组成的集

合，但是它们只是被作为一种具体的系统加以对待的. 只是到了十九世纪末，代数学家才认识到，对许多不相联系的具体系统抽出它们的共同结构来进行综合研究，这时才达到公理化、形式化的抽象代数阶段. 拿抽象代数的基本研究对象群来说，它从一个方面极为概括地研究了整数、有理数、实数、超复数、二次型、置换、变换等的某方面属性. 到1906年亨丁顿给出了群以及其他代数系统环、域等的公理化、形式化定义. 至30年代，范德瓦尔登的《近世代数》问世，完成了代数领域公理化、形式化的工作. 他在序言中说："'抽象的'，'形式化的'或'公理化'方向在代数领域中造成了新的增长，特别地在群论、域论、赋值论和超复数系等部门中引起了一系列新概念的形成，建立了许多新联系，并导致了一系列深远的结果. 本书的目的就是要将读者引入这一概念世界."

数学分析就是无限小分析. 人类探索有限、无限以及它们之间的关系由来已久. 古希腊德谟克利特、欧几里得、阿基米德曾对无限提出过不同的看法. 德谟克利特是原子论者，把这种思想引入几何学，最早求出锥体和圆锥体体积. 求圆锥的体积要涉及无限小概念，尽管没有确切说明，但直观的固定无限小量观念已经顽强地粘附在数学

上了．每当逻辑显然无济于事的时候，直观就常常令求助于它．欧氏《原本》被人认为是完美无缺的．书中主要体现了攸多克索的穷竭法思想，原本中这样表达的：已知两个不等量，“如从较大的量减去大于其一半的量，再从余下的量中减去大于其一半的量，这样一直继续下去，总可使某一余下的量小于已知的较小的量”．这个定义使希腊几何学的一切论证都排除了无限小量．阿基米德兼有两种特色，他把欧几里得一丝不苟的推演，跟德谟克利特带有朴素直观的想象谐和在一起．阿基米德在《论抛物线的面积》中，用无限小方法去求得结果，用穷竭法加以论证．他的做法“使得往后由开普勒、卡瓦列里、费马、莱布尼茨和牛顿等人相继孕育的无限的微积分日趋完备．”看来十七世纪牛顿和莱布尼茨的微积分是沿袭德谟克利特的原子论思想的．由于对无限小量未作出正确的说明，微积分理论遭到了主教贝克莱的攻击，被称之为“逝去了的量的鬼魂”，当时很难对贝克莱的逻辑作出恰当的回答．直到十九世纪，经过柯西，魏尔斯特拉斯的精深研究，终于使数学分析回到了欧几里得式的严格，他们通过有限量，成功地给出了无限小量形式化的定义，为近代分析奠定了基础．

传统的逻辑被认为本质上是与规范的思维相

关联的．然而，逻辑发展表明，逻辑的一般化已经使自身成为与数学几乎相同的纯粹形式科学——一门能够在形式符号系统中加以表述的关于思维规则的科学．如同几何学起源于实际的土地测量，凭借漫长的发展才成为一门纯粹的形式数学一样，逻辑学起源于对思想的分析与评判，凭借漫长的发展才成为一门纯粹的关于规则的形式科学．

这里需要强调的是在几何学的公理化、形式化过程中，想否证第五公设而导致非欧几何学产生这件事．大家已看到，在欧氏《几何原本》中，有一条叙述冗长的公理，即第五公设．它说：如果一直线与两直线相交，且使在同一侧的两内角之和小于二直角，那么这两条直线，当无限延长时，相交于两内角和小于二直角的那一侧．与其他公设相比，似乎太复杂，可以从其他的公理推出．也就是说，人们很难相信它的独立性．因此，历史上有许多数学家想把它作为定理加以证明．这种努力延续了一千多年，未获肯定的结果．后来人们改用反证法，从第五公设的否定命题出发，希望能导出矛盾，从而证明第五公设．但是这种证明往往很长，有的甚至连续推出几十个乃至上百个命题后，仍未见矛盾，这样就逐渐形成了另外的无矛盾的演绎系统，这就是非欧几里得几何

学. 同时走出这决定性的一步的有匈牙利的青年数学家波耶，俄国数学家罗巴契夫斯基和德国大数学家高斯. 非欧几何学的产生是经典数学走向现代数学的重要标志之一，同时它也显示了关于公理性质的研究对创立新数学的巨大作用.

非欧几何学问世以来，数学公理系统的无矛盾性问题，一直为数学家所关注. 大家一般都是这样看的，作为正确的演绎方法，总应该从真命题导出真命题，作为定理当然要求它是真的. 但是，两个矛盾命题只能有一个真，它们不可能同真，它们也不可能都成为定理. 因此，如果一个命题和它的否定命题都能被选作为公理的话，那么公理可以不再必然是真的，当然由此推出的定理也可以不再是真的，这样一来，似乎没有什么能保证演绎不会导致矛盾. 由此可见，公理体系的无矛盾性即一致性无疑是至关重要的. 非欧几何学的一致性问题，直到 1888 年由贝尔特拉米(E. Beltrami)证明了一种非欧几何有欧几里得几何为模型时才获得解决，因为人们总是认为欧几里得几何学的公理是真的. 这种证明都使用了解释的方法. 新几何公理经解释可以成为欧氏几何中的定理. 这样一来，新几何中的一切定理经过解释都可成为欧氏几何中的定理. 如果新几何中出现矛盾，那么这两条矛盾着的定理，经解释成

欧氏几何中的两条定理时也是矛盾的．因此，如果我们认为欧氏几何没有矛盾，那么非欧几何，作为新几何也不会矛盾．这种把一门新的数学理论的一致性的证明，通过解释转化为对另一门数学理论（一般地说比前者较为人们所熟知）的一致性证明的方法，称为相对一致性证明．将非欧几何一致性证明转化为对欧氏几何一致性证明，就是这种例子．这种证明的结果是相对的，也就是说，如果欧氏几何是一致的，那么非欧几何也是一致的．现在问题是尽管人们可以承认欧氏几何是一致的．但是，这只是一种朴素的直觉，欧氏几何一致性，在理论上的证明并没有给出过．怎么办，幸好笛卡尔为我们准备了解析几何，通过几何元素（点、线、面）和坐标、方程建立对应，可以把几何命题转化为代数命题．这样我们又可以欧氏几何的一致性证明．转化为对实数的一致性证明．这是又一次的相对一致性证明．再进一步，还可以把实数命题，通过解释成为自然数命题，从而把实数的一致性转化为自然数的一致性证明．其实，用相对一致性证明来证明系统的一致性，总有一个限度．最后，总会有一门或几门理论，它们的一致性不能用类似的方法证明，而要用绝对一致性的证明．就证明所需用到的方法而言，无所谓什么绝对．所以如此称呼它是因为：

它不同于相对一致性证明，不再把某一系统的一致性问题转化出去．沿此道路前进的结果，就是去寻找自然数算术或集合论的一致性的证明．

要正确地进行一致性的证明，需要对公理体系实现完全的形式化，建立起形式系统．罗素和怀特海写作的《数学原理》，策麦罗—弗兰克尔的公理集合论恰好完成了这个准备．

如何估计一致性证明可能取得的成果，如何去实现一致性的证明．学术界众说纷云，经过三、四十年的努力，问题才算有了明确的回答．

1900年，在巴黎召开第二次国际数学家代表会议，其时数学、逻辑名家会集，希尔伯特作了题为“数学问题”的著名演讲．它对二十世纪的数学、以至逻辑学的发展产生了深刻的影响．了解一下这篇启人思迪的杰作，必将加深对演绎、证明、公理系统、形式化等的认识．希尔伯特说：“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看今后的世纪里我们这门科学的发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？

“对于数学问题的解答，应该提出怎样的一般要求．我认为这首先是要有可能通过以有限个前提为基础的有限步推理来证明解的正确性，而这

些前提包含在问题的陈述中，并且对每个问题都有确切定义．这种借助有限推理进行逻辑演绎的要求，简单地说就是对于证明过程的严格性要求．这种严格性要求在数学中已经像座右铭一样变得众所周知．它实际上是与我们悟性的普遍的哲学需要相应的；另一方面，只有满足这样的要求，问题的思想内容和它的丰富涵义才能充分体现．

“我认为：无论数学概念从何处提出，无论是来自认识论或几何学方面，还是来自自然科学理论方面，都会对数学提出这样的任务：研究构成这些概念的基础的原则，从而把这些概念建立在一种简单而完全的公理系统之上，使新概念的精确性及其对于演绎之适用程度无论在哪一方面都不会比以往的算术概念差．”

从以上的叙述，可以看到希尔伯特十分关心证明、公理系统、有限推理等他借以建立证明论的基础概念．特别在他叙述 23 个问题时，列举的第二个问题就是算术公理的无矛盾性：

“我想首先指出下述的问题，在关于公理所能提出的许多问题中，下述问题最为重要，这问题是：证明这些公理不互相矛盾，就是说，以它们为基础而进行有限步骤的逻辑推演，决不会导致矛盾的结果．”

把它列为重要问题，可见希尔伯特对它的关

注、重视．希尔伯特当时对问题的解答，期待甚高，似乎为期不会太远．他断言："我坚信，通过对无理数理论中熟知的推理方法的仔细研究和适当变更，一定能够找到算术公理无矛盾性的直接证明．"历史的发展表明，道路并非径直．

过了2年罗素提出了悖论，随后又发现了一系列悖论．后来罗素于1903年、1906年分别提出了简单类型论思想和分支类型论，并且主张将数学归结为逻辑，他说："在历史上数学和逻辑曾是两门完全不同的学科：数学与科学有关，逻辑与希腊文有关．但是，二者在近代都有很大的发展：逻辑更数学化，数学更逻辑化，结果在二者之间完全不能划出一条界线；事实上二者也确是一门科学．它们的不同就像儿童与成人：逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代．"后人把弗雷格、罗素的设想称为逻辑主义．它引起一部分人的称道，也引起一部分人反对．其中尤以直觉主义最为突出．

最早的直觉主义者是克罗内克(Kronecker)，他极力反对康托的实无限．他只能接受整数，认为自然数是上帝创造的，直觉上是清楚的．其他的东西都是人造的，可疑的．他想从数学中砍去无理数．另一理由是，诸如无理数概念等，它们没有给出构造方法或判定准则，不能用有限步骤

确定所研究的对象．法国大数学家彭加勒极力嘲笑逻辑主义把数学建立在逻辑基础之上，认为这是将数学转化为无限的同义反复．他把罗素给出的数的定义："所谓数是所有与之相似的类的类"．称为高度人为的推导，嘲讽为"一个令人赞叹的定义"．彭加勒特别反对那种不能用有限个词来定义的概念．例如：按选择公理选出一个集合，如果是从超穷无限个集合的每一个中作选取的话，那就不是真正地被定义了的．

直觉主义最为系统的阐述者是布劳维尔．他认为基本的直觉是按时间顺序出现的感觉．"生命的各种要素分解为质上不同的各个部分，只有当这些部分为时间所分隔时，才能重新联系起来，这是人类智力的根本现象；将这一过程中的一切动人感情的内容抽象掉，就过渡到了数学思维的根本现象，即纯粹的二分性（two-oneness 或 biunity）．这种二分性，即数学的原始直觉，不仅产生了数 1 和 2，而且也产生了所有的有限数，因为二分性的一个元素可以被设想为一个新的二分性，这个过程可以无限地重复下去．"布劳维尔还坚持认为："数学的基础只可能建立在这个构造性的程序上．"决定概念的正确性和可接受性的是直觉，而不是经验和逻辑．由上可知，尽管布劳维尔的思想，也能导致无限，但它是 n 到 n+1 这个

步骤的空洞形式的无限反复．显然这不是康托的实无限，即完成了的无限，而是一种潜无限，即处在发展中的无限．为了更为具体地理解布劳维尔的思想，看看另一直觉主义者外尔所作的解释是有益的，外尔在谈到直觉主义无限观时说："……数目的序列，它会增长超过任何一个已经达到的阶段……，它是一簇开向无限的可能性；它永远处于创造的状态中，并不是一个本来就存在着的封闭王国．""布劳维尔启开了我们的眼睛，使我们看到：在信仰超越一切人类所能实现的可能性的绝对中，培育起来的经典数学走过头了，…….”

"按照布劳维尔的看法和历史的研究，经典逻辑是从有限集合和它们的子集的数学抽象出来的．……人们忘记了这个有限的根源，后来就错误地把逻辑看作是高于并且先于全部数学的某种东西，而终于没有根据地把它应用到无穷集合的数学上去了．这就是集合论的堕落和原罪，它正是因为这个原故而受到自相矛盾的惩罚的．”

在布劳维尔看来，在逻辑领域中，有些逻辑原则在直觉上可以接受，有些不可以接受，排中律就是不可接受的一例．排中律肯定：每一句有意义的话，非真必假，它是间接证明的依据，其实，历史上起源于用于有限集合的子集上的推理，

后来就逐渐成了一条独立的先验的原则，并且无根据地把它用于无限集上去了. 因此，当有人证明了，在某一无限集合中，并非所有元素都具有某一性质时，就不能断言，至少有一个元素不具有该性质. 这就是布劳维尔对排中律的态度. 他们认为排中律适用的是，结论可以通过有限步骤得到的情形.

选择公理是他们又一不能接受的例. 如果对有限个集合作逐一选择，那当然是可以接受的，问题在于对无穷个集合作逐一选择，无论是不可数无穷还是可数无穷，对于直觉来讲都是不可理解的.

直觉主义还坚持数学对象必须是可构造的. 数学的存在等于可构造. 所谓可构造是指或者能具体给出，或者能给出一个得到某一对象的计算方法. 按直觉主义的看法数学法则的正确性、有效性存在于人的智力之中. 直觉主义否定实无限，禁用排中律，提倡可构造的结果，导致一大批经典数学的失效，高等数学的大部分成果都被丢弃掉了. 连外尔也不得不承认："布劳维尔曾使数学获得了它最高度的直观明显，……然而不能否认，在向着更高级和更一般理论迈进时，……产生了几乎无法容许的尴尬的后果，而数学家却痛心地看到他所认为是用具体的材料搭成的大厦竟会消

失于眼前浓雾之中.”

经过了十几年对数学基础方面保持沉默的希尔伯特，1922年提出了他的证明论. 其时罗素与怀特海的《数学原理》，和策麦罗的公理集合论已先后出版，这为希尔伯特方案准备了条件. 直觉主义的主张也为希尔伯特提供了养料. 希尔伯特此时提出的证明论，一方面是他1900年设想证明数论和分析一致性的继续，另一方面恐怕也是直感到了坚持经典数学的必要性. 试图改变布劳维尔等的错误途径. 他说:“外尔和布劳维尔的做法，基本上是走克罗内克的老路. 他们试图这样为数学奠定基础，那就是，一切对他们不方便的都要被抛弃，并且树立一个克罗内克式的禁令专政. 但这就要把我们的科学支解，使它残缺不全；如果我们接受这种改革办法，我们就要冒失去我们最有价值的宝藏一大部分的危险. 外尔和布劳维尔驱逐了无理数、函数，还有数论函数的一般概念，康托的高次数类等等.‘在无穷多个整数中总有一最小者’这个命题，甚至在判断中，例如在‘或者只有有穷多个质数或者有无穷多’中的逻辑排中，这些命题和推论规则都在被禁止之列.”

希尔伯特方案的基本步骤是：将理论置入逻辑演算，使得完全形式化，构成形式系统；用元理论来研究这些形式系统的逻辑矛盾，即无矛盾

性问题．希尔伯特十分强调所使用的方法和工具的有穷性．以下就形式化、有穷观点作一些说明．

关于形式化，希尔伯特认为把理论形式化，是指用符号去表示理论中的命题、谓词、关系、个体以及逻辑联结词（如否定、蕴涵、析取和合取量词等）．句子则被转换为清晰地加以限定的系统中的公式．公式和公式之间的推演须按照系统中精确规定的规则或定义进行．在做所有这一切时，只顾及符号的形状本身，而不顾及符号所代表的意义．这一点罗素和怀特海《数学原理》中的系统恰好提供了基础．在罗素和怀特海那里，严格说来离实现完全形式化还有些距离：有些推理规则没有用符号语言表达，如分离规则；也没有区分对象语言和元语言等．这些在希尔伯特方案中都有了进一步的澄清、并且作出了推进．

关于有穷观点．古典数学的无矛盾性问题是由于实无穷引起的，古典的逻辑演算也假定了实无穷，因之如果仍然用以实无穷为前提的思想方法或工具去论证古典数学的无矛盾性，会犯循环论证的错误．这就是有穷观点．这一点直觉主义对希尔伯特早期思想的批评，可能加深了他的印象，成了他的可借鉴之处．另外，希尔伯特提出有穷观点，也是他长期卓有成效的开展数学科学研究的经验概括．他在分析有限数论的性质和方

法时，意识到这个理论显然是可以利用内容上直觉的考虑单靠数学方程来竭尽其一切的，但是，是否可以把它作为证明论的工具，于是他对这个工具的结构进行的研究，他得出结论：这种科学要求事实上是可以满足的，也就是说有可能用纯直觉的和有限方法，像获得数论中的那些真理性一样，也获得保证数学工具可靠性的那种判断力. 具体地说他的有穷方法有以下特征. 每一步骤只考虑确定的有穷数量的对象，承认潜无穷，而不处理任何包括无穷多个对象完成了的实体，即不处理实无穷；全称命题只能在假言的意义下理解，也就是说，它是对任一给定对象的断定. 全称命题表达一个规律，这个规律对每一个具体对象都必定可以验证；存在判断必须能够直接给出一个特定对象，或者能给出一个其步骤有特定界限的方法以得到那个对象，排中律对某些涉及无穷的命题不能适用；允许使用元数学中关于数学的具体构造的"内容的归纳法"也就是说可以有限制地使用数学归纳法.

希尔伯特对有穷观点的陈述，并不精确、完全. 照王浩教授的估计："这个不明确的概念的最可能的解释是，它们大约相当于原始递归算术（自然没有量词）的一个弱扩张."王宪钧教授认为：有穷方法是一种所谓的能行方法，它较一般

递归为狭.

当时，人们的想法是希尔伯特的规划看来是行得通的，自从对有限数论的无矛盾性获得证明后，更加增加了人们的信心，只需经过一段时期的努力，数学无矛盾性将会获证. 希尔伯特本人也这样认为，他在 1927 年和 1928 年的两次讲演中断定了这一点，并且还乐观地预言：只需要若干即将出现的纯粹算术的初等引理，就能证明分析（微积分理论）的无矛盾性. 1931 年哥德尔的论文《关于数学原理和有关系统的形式不可判定命题》发表，文中证明的哥德尔不完全性定理，对希尔伯特的论断作了否定的回答，给希尔伯特的方案以致命的打击.

二 逻辑演算



哥德尔在《论数学原理和有关系统的形式不可判定命题》中，一开始写道："众所周知，数学朝着更为精确方向的发展，已经导致大部分数学分支的精确化，以致人们只用少数几个机械的规则就能证明任何定理．迄今已建立起来的最完整的形式系统，一个是数学原理，另一个是策麦罗—弗兰克尔（Zermelo-Fraenkel）集合论公理系统．这两个系统是如此的全面，以致今天在数学中使用的所有证明方法都在其中形式化了，也就是说，都可以归约为少数几条公理和推演规则．因此人们可能猜测这些公理和推理规则足以决定这些形式系统能加以表述的任何数学问题．下面将证明情况并非如此．相反，在刚才提到的两个系统中，存在着相当简单的、根据公理却不可判定的问题．并且，这种情况绝非刚才说到的系统的特殊性质，对更广泛的系统来说，也是成立的．"这一段话实际上已经概括了整个论文的内容．它提到了"形式系统"，"形式化"，"公理方法"，"不可判定的问题"等现代逻辑的基本概念、基本

方法. 因此，要真正能理解，进而把握哥德尔不完全性定理的内容及其证明，先搞清楚逻辑演算系统是必要的. 所谓逻辑演算是指命题演算和谓词演算，即命题逻辑和谓词逻辑的形式系统.

命题逻辑是逻辑的基础组成部分之一，它只包括一部分逻辑形式和规律，在研究考察问题时，它以命题为基本形式，把命题只分解到其中所含的简单命题，不再把简单命题进一步分解成非命题成分（主词、谓词、量词）. 由简单命题出发，经使用联结词构成复合命题，然后研究复合命题的逻辑形式及其推理关系. 由此可以得到一些重要的逻辑形式，这种形式和有关的逻辑规律属于命题逻辑. 谓词逻辑也是逻辑学的基础组成部分，不过它与命题逻辑不一样，它不以命题为基本形式，而把命题分析为主词（个体词）、谓词和量词. 然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系.

命题逻辑适用于有效性完全只依赖于命题之间互相联结的形式，而不涉及命题本身的组成形式的推理和论证. 例如：具体推理

这块地种麦子，或者种蚕豆.

这块地不种麦子.

所以，这块地种蚕豆.

当用符号 p，q 分别表示命题“这块地种麦子”，

"这块地种蚕豆"时，上述推理可写成

p 或 q

非 p

所以，q.

无需对命题作进一步分解，就可以显示推理的有效性．但是有些推理的有效性，在命题逻辑中不能显示．例如：三段论

所有的科学规律是不以人们的意志为转移的．

逻辑学的规律是科学规律．

所以，逻辑学的规律是不以人们的意志为转移的．

如果，用命题逻辑来表述，由于三个语句都是简单句，可分别用 p，q，r 表示，于是上述推理的形式是

p

q

所以 r

显然，这并不能显示推理的有效性．因此，引进谓词逻辑在所难免．

1. 命题逻辑和命题演算

命题逻辑的规律反映复合命题的逻辑特征．

复合命题由联结词构成，复合命题的特征决定于联结词所反映的客观关系，所以命题逻辑又称为联结词逻辑．命题逻辑涉及真值联结词，真值形式，真值表，有效性等基本概念和基本方法．

真值联结词．命题的语言形式是句子，当我们对句子作分析时，首先要考察的日常语言的一个方面是联结词．句子有简单句和复合句．所谓简单句是只有一个主谓结构的句子．例如

科学是生产力．

雪是黑的．

m 是偶数．

一个复合句由几个简单句通过联结词构成．例如

科学技术是生产力并且文化艺术是上层建筑．

如果 m^2 是偶数，那么 m 是偶数．

雪是白的或者雪是黑的．

其中“并且”，“如果…，那么…”，“或者”均是联结词．常用的联结词，还有“并非…”，“…，当且仅当…”等．句子并非都有真假．所谓命题是一个有真、假意义的句子．有真假意义的简单句是简单命题．复合命题是由几个简单命题通过联结词构成的．把几个简单命题联结起来从而构成一个复合命题的词项是联结词，构成复合命题的命题（并不一定是简单命题），称为成分命题或支

命题.

所谓真值联结词是反映复合命题和支命题之间真假关系的联结词，它是普通联结词的逻辑抽象，逻辑形式. 真值形式是与复合命题相当的由真值联结词构成的形式结构，也可以说是由真值联结词构成的复合命题的形式结构，命题逻辑中的公式都是真值形式. 与 5 个普通联结词“并非…”，“…或…”，“…并且…”，“如果…，那么…”，“…当且仅当…”，相应的真值联结词，分别用符号

$\neg$	（读作）否定
$\vee$	析取
$\wedge$	合取
$\rightarrow$	蕴涵
$\leftrightarrow$	等值

表示. 当用 p、q 表示命题时由它们可以得到 5 个基本真值式：

$\neg p$	否定式
$p \vee q$	析取式
$p \wedge q$	合取式
$p \rightarrow q$	蕴涵式
$p \leftrightarrow q$	等值式

否定式只有一个支命题，其余 4 式都有两个支命题.

使用真值联结词，能够由支命题的真假完全决定复合命题的真假．以T、F分别表示真、假，我们可以用图表列出5个基本真值式和支命题之间的真假关系．这种图表称为真值表．5个基本真值式的真值表为：

p	$\neg P$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

否定式$\neg p$的真假与p相反；析取式真，只需支命题中有一为真；合取式真，要求二个支命题皆真；等值式真，要求两支命题同真同假．这些规定的合理性是显然的．蕴涵式$p \rightarrow q$中的p，q分别称为前件、后件．仅当前件真后件假时，蕴涵式假；其他情况即前件假（不管后件真假），后件真（不

管前件真假）时，蕴涵式真．对这个规定的合理性，历史上以至今天，逻辑学家一直有不同看法．其实，这个规定至少迄今仍不失为最恰当的．而且应用广泛，特别在数学推演中，已能满足需要．

真值形式是命题形式的一部分，在命题逻辑中的命题形式就是真值形式．一般的真值形式，总是由命题符号多次使用真值联结词构成．为此，求一般真值形式的真值，可以这样着手：先确定式中的命题符号，列举几个符号的各种取值组合，即给出真假情况的搭配，然后根据真值式的构成过程由简到繁地写出它们的各个组成部分，最后根据基本真值形式的真值表，逐步计算组成部分的真值，直到算出要求的真值形式的真值．

例 2．1 求 $(p\wedge q)\to(\neg\ (q\vee p))$ 的真值．

解

p	q	$p\wedge q$	$q\vee p$	$\neg\ (q\vee p)$	$(p\wedge q)\to$ $(\neg(q\vee p)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T

一个命题形式是重言式，当且仅当，对在式

中出现的各命题符号指派所有可能的真值时，该式总是真的.

一个命题形式是矛盾式，当且仅当，对在式中出现的各命题符号指派所有可能的真值时，该式总是假的.

此处还可有可真可假的真值形式.

推理形式和有效性. 在这里我们只限于考察前提和结论都是命题的情况. 大家知道推理是由一个或几个已知判断得出一个判断，当不区别判断和命题时，也可说成由一个或几个命题得出一个命题. 推理形式是命题形式的有限序列，序列中最后的一个公式是结论，其余部分为前提. 如果推理的结论是它的前提的合乎逻辑的结果，这种推理就是正确推理，也叫有效推理. 所谓合乎逻辑是指：如果前提真，所得的结论也必然真. 据此，我们把无效论证定义为：

推理形式 A_1，A_2，…，A_n；∴A 是无效的，如果能够对出现在 A_1，A_2，…，A_n，A 中的命题符号指派真值，使得 A_1，A_2，…，A_n 都真而 A 却为假. 反之，推理形式就是有效的.

有效推理尽管当前提都真时，结论真. 但是它并不要求前提和结论必须为真. 比有效推理要求更高的，还有可靠推理. 一个可靠推理是前提为真的有效推理. 显然可靠推理的结论必定是真

的.

一般来说，容易检验推理形式的无效性，因为只需找出一种使前提真而结论假的对命题变元的真值指派即可. 推现形式有效性的检验就比较麻烦，它需要验证推理形式在各种真值指派下的真值. 这里提供一个一般的判别定理：

推理形式 $A_1, A_2, \cdots, A_n; \therefore A$ 是有效的，当且仅当，与之相当的命题形式（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）$\rightarrow A$ 是重言式.

证

首先假设：$A_1, \cdots, A_n; \therefore A$ 是有效推理形式，而 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ 却不是重言式. 那么一定存在某一种对出现的命题变元的真值指派，使得（$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$）取值为 T，而 A 取值为 F. 考虑到推理式的前件是合取式，合取式真时，它的合取项皆真，所以有 $A_1, \cdots, A_n$ 皆为 T，A 为 F. 这和推理形式有效矛盾. 于是，否定推理式 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ 不是重言式的假设，即得推理式是重言的.

其次，假设 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ 是重言式，而 $A_1, \cdots, A_n$; 所以 A 是一无效推理形式. 既然是无效的，当然会存在某个真值指派使得 $A_1, \cdots, A_n$ 皆真，而 A 假. 此时，显然蕴涵式不会是重言式，这里有一个矛盾. 于是，否定推理形式无效的假

设，推理形式是有效的.

判别定理在理论上建立了有效推理和重言式之间的关系，这样推理形式的有效性的检验，就可以转化为对蕴涵式的重言性质的检验. 这可以通过真值表解决问题. 为今后使用方便起见，我们列出常用的重言蕴涵式和等值式如下：

$((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$	分离律
$((p\rightarrow q)\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$	否定否定式
$((p\vee q)\wedge\neg p)\rightarrow q$	否定肯定式
$(p\wedge q)\rightarrow p$	简化律
$(p\wedge q)\rightarrow(q\wedge p)$	拼合律
$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$	假言三段论
$((p\wedge q)\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$	移出律
$((p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow(p\wedge q)\rightarrow r)$	移入律
$(p\rightarrow(q\wedge\neg q))\rightarrow\neg p$	归谬律
$p\rightarrow(p\vee q)$	附加律
$p\leftrightarrow\neg\neg p$	双重否定律
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$	假言易位律
$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$	德摩根律
$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$	
$(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$	交换律
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$	蕴涵析取等值律
$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$	
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$	蕴涵否定律

$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\neg\ \wedge\neg\ q))$　　条件律

命题演算是数理逻辑的基本组成部分，是实现了完全形式化的命题逻辑．也可以说是命题逻辑的形式系统．命题演算一般有重言式的公理系统和自然推理系统．十九世纪后期，弗雷格最早提出了一个命题逻辑的形式系统．本世纪初由罗素和怀特海在三大卷《数学原理》中提出了一个基本完备的系统．在弗雷格之前，逻辑学家所考虑的，主要是像几何学那样，如何从公理推出定理的具体的公理系统，而并没有把逻辑学本身处理成由公理出发，推导定理的演泽系统．

所谓公理系统，是从一些不加定义的概念和不加证明的公理出发，根据演泽方法推导出一系列定理而构成的系统．概念是反映对象本质属性的思维形式．人们通过实践，从对象的许多属性中，撇开非本质属性，抽出本质属性概括而成．概念的语言形式是词或词组．概念都有内涵和外涵．不加定义的概念是指对它没有逻辑定义的概念．将概念置入公理系统时可以排序，在后出现的概念，可以用“属加种差”的方式由在前的概念定义，而在最前的几个初始概念，不能用此法定义，就是不加定义的概念．公理是一个命题，它的真理性是人类亿万次经验的总结．它的语言形式是

语句．将命题置入公理系统时也可以排序，在后命题的确立可以由在前命题证明，而在最前的几个初始命题不能凭逻辑证明，它们就是公理．最早用自然语言叙述公理理论的是亚里士多德，最早建立的公理系统是欧几里得几何学．现代公理系统要求严格、精确．推理所遵循的规则必须是系统中明确给定的．证明过程中不得凭借直观不自觉地附加其他前提，和采用未明确给定的规则；公理的选择不必要求真实性直观、明显，而只要它能充分确定所要处理的对象的特征，和不会导致矛盾，功能完备即可．古典的公理系统是用自然语言表述的，现代公理系统要求尽可能完全地用形式语言表达，这样就导致了形式系统．

所谓形式系统是用形式语言表述的公理系统．一般来说由四个部分组成：

1．初始符号，它们犹如构成形式系统大厦的砖块，是初始概念的抽象．

2．形成规则．由初始符号构成合式公式的规则．初始符号可以组成各种符号串（序列），有些符合一定条件的符号串，我们称为合式公式．

3．初始公式．用自然语言表述的公理的抽象．是作为形式系统出发点的合式公式，是公理的抽象．

4. 变形规则. 由给定的某些合式公式推出某个合式公式的形式规则，是推理规则的抽象.

逻辑学的发展经历了长期的抽象、概括、一般化的过程，即形式化. 形式系统是形式化所达到的高峰. 偶而使用一些符号去表达词项、命题，在亚里士多德逻辑中已有所反映，这是形式化历程的开端. 在一些关键场合使用符号，能极大地促进学科的发展取得重要成果，如量词符号的引进等. 当形式化方法用于公理系统时，才产生了形式系统，它使符号的表述、创造作用获得了更大的发挥，可以说形式系统是形式化过程的高级产品.

关于语言，就其自身而言，可以认为是“为相当大的团体的人们所懂得并使用的字以及组合这些字的方法的统一体”,就其作为一种社会现象而言，它是人类社会的产物. 语言是人们交际的工具，是人们思维的工具. 语言有三个特征：社会性，复杂性，生成性，语言符号和客观事物之间的关系具有任意性,它不是由客观事物决定的，而是由社会集团“约定俗成”的，这就是社会性. 语言由人脑支配，同思维紧密相联. 至今，现代科学技术还不能完全模拟语言的全部机能，这是语言复杂性的明证. 语言的规则有限，但人们却

能说出无限多样的话语，有的还是过去从未有过的．这就是生成性．正是有这些特点，使得自然语言有极为丰富的表现力．但是这也带来了一些问题，由于语言的歧义性，使得表述不够精确，用它来进行演算几乎不可能．甚至处理某些逻辑问题时会导致悖论．波兰逻辑学家塔斯基曾说过：日常语言的普遍性是一切语义悖论产生的根源．在日常语言那样丰富的语言中，逻辑规律在其中成立的条件下，想无矛盾地使用语言是不可能的．基于此，人们想用形式语言去替代日常使用的自然语言，以期克服歧义性，达到将逻辑转化为演算这样一个既定的目标．有些学者把形式语言看成是具有精确的规则的符号系统．它相当于形式系统．初始符号是构成形式语言的砖块，形成规则相当于语法规则．这样，我们就可以把逻辑演算系统看成是形式语言之一．现代逻辑是用形式语言表述的，尽管表现力目前还受到一定限制．但是它无歧义，能够十分精确地表现推理．它将运用符号表示概念、判断，能够把推理转化为符号的变换，把逻辑转换成演算．由于用某些形式语言表述的逻辑规则十分精确，因而能避免悖论．并且能适应电子计算机发展的需要．

命题演算是一个形式化的演泽系统．现在介绍一个形式系统 L，它是重言式的公理系

统.

形式系统 L.

一、初始符号（无限）：

p_1，p_2，p_3，…

$\neg$，$\rightarrow$，(,)

二、形成规则：

（1）p_i 是一合式公式，其中 $i \geqslant 1$.

（2）如果 A，B 是合式公式，那么 $\neg A$，$(A \rightarrow B)$ 是合式公式.

（3）所有合式公式由（1），（2）生成. 即只有适合以上两条规则的，才是合式公式. 在不会引起混淆时，今后合式公式简称公式.

三、初始公式：有无限多个初始公式，我们不能一一列出，不过，可以通过三个公理模式把它们全部列出. 对于任何公式 A、B、C，下列是初始公式：

(L_1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

(L_2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(L_3) $((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

四、变形规则：在本系统只有一个变形规则，称为分离规则（记作 MP）. 断定符号 $\vdash$ 表示本系统对后面跟的合式公式是断定的：

从$\vdash A$，和$\vdash A \to B$；可得$\vdash B$.

一般的形式系统可作多种解释，L 当然也可以作多种解释. 当把 L 解释为命题逻辑时，初始符号 p_i 就是命题. $\neg$，$\to$就是真值联结词. 括号用来规定运算次序. 初始符号相当于形式语言中的字母库. L 的形成规则所规定的合式公式，可解释为命题形式. 符号$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$并没有出现在系统的字母库中，因而有它们出现的符号串暂时还不能作为 L 的组成部分. 不过，当我们回忆起下列重言的等值式：

$$(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg A) \to B)$$

$$(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \to (\neg B))$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$$

就启发我们思考，把它们当作是用$\neg$，$\to$对$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$所作的定义. 这样一来，$(A \vee B)$，$(A \wedge B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 实际上分别是 $((\neg A) \to B)$，$\neg(A \to \neg B))$，$((A \to B) \wedge (B \to A))$ 的简写，既然后者是 L 的合式公式，前者也是. L 中初始公式的解释就是初始命题，即公理. L 的变形规则的解释是推理规则，分离规则其实就是充分条件假言推理的肯定前件式的抽象. 从符号方面着眼，L 中的推导是符号串的变换；从思维角度看，系统中的推导就是演绎.

命题演算 L 是一个形式系统，可以看成是一

种形式语言，我们说我们在研究形式系统 L 时，实际上是把一种形式语言当作了研究对象.同时，在研究系统 L 时，还需要一种工作语言.这样，我们在这里就遇到了两种语言，我们把作为研究对象的语言称为对象语言；把讨论对象语言时所使用的工作语言称为语法语言，或元语言.例如，我们用汉语来研究系统 L 时，对象语言就是命题演算 L 这个形式语言，语法语言是汉语.我们这里例举的对象语言恰是人工制造的形式语言，但并非对象语言必须是形式语言.例如我们用汉语研究汉语时，对象语言和工作语言（语法语言）就都是汉语.还得声明一下，本书在一般情况下，对象语言是形式语言.语法语言是自然语言.粗略地说，用语法语言所陈述的关于对象语言中语言表达式之间形式关系的理论称为语法理论，或语形理论.语法理论就是元理论，或者说语法理论是元理论之一.

为深入讨论形式系统 L，需要引进证明和演绎的定义.

定义 2.2 L 中的一个证明是公式的一个有序列 A_1，…，A_n，且满足以下条件：对每一个 i $(1\leqslant i\leqslant n)$

（1）A_i 是 L 的一条公理，或

（2）A_i 由在前的两个公式 A_j 和 A_k（$j<i$，k

$<i$)分离而得. 即 A_j 是对 A_i 和 A_k 使用 MP 规则的直接后承. 这样的一个证明可称为 A_n 在 L 中的一个证明，A_n 也称为 L 的定理，用 $L\vdash A_n$ 表示. 显然，序列中任一在前的片断：A_1，…，A_k 也是 L 的一个证明，A_k 也是定理. 当然 L 中的公理也是 L 的定理.

定义 2.3 令 Γ 是 L 中的一组公式，它们可以是 L 中的公理和定理，也可以不是，L 中以 Γ 为前提的演绎是公式的一个有序列 $A_1,\cdots,A_n$，且满足以下条件：对每一个 i（$1\leqslant i\leqslant n$），

(1) A_i 是 L 的一条公理

(2) A_i 是公式组 Γ 中的一个.

(3) A_i 由在前的两个公式 A_j 和 A_k（$j<i$，$k<i$）分离而得.

如果这样的一个演绎存在，我们标有下标最后一个公式 A_n 称为以 Γ 为前提是可演绎的，或称 A_n 为 L 中 Γ 的后承，记作 $\Gamma\vdash_L A_n$. 注意 L 中的关于空前提的演绎就是 L 中的一个证明.

要记住"$\vdash$"符号并非形式系统（对象语言）中的符号，而是语法语言中的符号，也叫语法符号. 目前 $\vdash A$ 的含义是明确的，它表示 A 是定理.

有了以上的介绍，下面就可以讲述 L 系统中定理的推演. 在 L 中，证明的根据必定是公理或

系统中已证的定理，证明的推进必须依照变形规则.

T_1: $\vdash (A\rightarrow A)$

T_2: $\vdash (\neg B\rightarrow (B\rightarrow A))$

T_3: $\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow ((B\rightarrow C)\rightarrow (A\rightarrow C))$

T_4: $\vdash ((\neg A\rightarrow A)\rightarrow A)$

T_5: $\vdash (A\rightarrow (B\rightarrow C))\rightarrow (B\rightarrow (A\rightarrow C))$

T_6: $\vdash (\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow ((\neg A\rightarrow B)\rightarrow A)$

T_7: $\vdash (\neg\neg A\rightarrow A)$

T_8: $\vdash (A\rightarrow\neg\neg A)$

T_9: $\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow (\neg B\rightarrow\neg A)$

T_{10}: $\vdash A\rightarrow ((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg B)$

T_{11}: $\vdash A\rightarrow (B\rightarrow (A\wedge B))$

T_{12}: $\vdash (A\leftrightarrow\neg\neg A)$

T_{13}: $\vdash (A\rightarrow B)\leftrightarrow (\neg B\rightarrow\neg A)$

T_{14}: $\vdash (A\rightarrow (A\vee B))$

T_{15}: $\vdash (A\wedge B)\rightarrow A$

T_{16}: $\vdash (B\wedge A)\rightarrow A$

T_{17}: $\vdash (A\rightarrow (B\rightarrow C))\rightarrow ((A\wedge B)\rightarrow C)$

T_{18}: $\vdash ((A\wedge B)\rightarrow C))\rightarrow (A\rightarrow (B\rightarrow C))$

T_{19}: $\vdash (A\rightarrow (A\rightarrow B))\rightarrow (A\rightarrow B)$

T_{20}: $\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow (A\rightarrow (A\rightarrow B))$

T_{21}: $\vdash (A\rightarrow (B\rightarrow C))\leftrightarrow ((A\wedge B)\rightarrow C)$

T_{22}: $\vdash (A\to(A\to B))\leftrightarrow(A\to B)$

我们详细地证明 T_1，T_2，其余请参考有关书籍：

T_1 的证明：

(1) $(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))$ (L_3)

(2) $(A\to((A\to A)\to A))$ (L_1)

(3) $((A\to(A\to A))\to(A\to A))$ (1)，(2) MP

(4) $(A\to(A\to A))$ (L_1)

(5) $(A\to A)$ (3)，(4) MP

每一行最初的数字为公式序列的编号，后面写的是理由.

T_2 的证明：

(1) $(\neg B\to(\neg A\to\neg B))$ (L_1)

(2) $((\neg A\to\neg B)\to(B\to A))$ (L_3)

(3) $((\neg A\to\neg B)\to(B\to A))\to(\neg B\to((\neg A\to\neg B)\to(B\to A)))$ (L_1)

(4) $(\neg B\to((\neg A\to\neg B)\to(B\to A)))$ (2)，(3) MP

(5) $(\neg B\to((\neg A\to\neg B)\to(B\to A)))\to((\neg B\to(\neg A\to\neg B))\to(\neg B\to(B\to A)))$ (L_2)

(6) $(\neg A\to(\neg A\to\neg B))\to(\neg B\to(B\to A))$ (4)，(5)，MP

(7) $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ (1), (6) MP

构造形式系统的目的在于用形式化的方法去反映用普通语言表述的推理，而并不在于寻求某些定理的特殊证明．我们知道，在对一个公式进行形式证明时，一般情况下，人们并非机械地去尝试各种可能的步骤，而往往依据经验到的对公式意义的直觉，去设想证明步骤的，只是在完成了粗略的证明后，再逐步补充使之成为完整的形式证明．确实，构造形式系统的目的，主要并不在此，而在于把逻辑体系作为一个整体，一个形式系统加以研究．

当把一个逻辑体系构造成一个形式系统后，我们就可以考察整个系统性能的优劣和功能的强弱．前者涉及可靠性，后者涉及完备性．我们用命题演算来反映命题逻辑时，可以问演算系统中的形式定理是否在直观上是真的．如果命题演算形式系统中的形式定理都是重言式，那么这个演算就是可靠的；反之如果演算推出的某些定理不是重言式，即不是真的，那么这个演算当然不可靠．可靠还是不可靠是构成逻辑演算系统的最重要的一个标志．

我们还可以问直观上真的命题，在构造出的形式系统中能否作为形式定理推出．如果命题逻辑中的重言式，都可以证明是命题演算系统中的

形式定理，那么这个演算是完备的；反之，如果存在某些命题逻辑中的重言式，不能证明是命题演算中的定理，那么这个演算不是完备的. 完备还是不完备是构造逻辑演算系统的另一十分重要的标志. 可靠性是逻辑系统性能优劣的反映，具有可靠性的逻辑系统性能是优良的；完备性是逻辑系统功能强弱的反映，具有完备性的逻辑系统功能是完备的. 我们在构造形式系统去反映逻辑演算时，力求达到可靠和完备，这里可以明确地说，我们已经构造的命题演算系统 L，它既是可靠的又是完备的. 以下我们将证明 L 的可靠性定理和完备性定理. 可靠性定理的证明比较简单，完备性定理的证明要复杂得多.

定义 2. 4　系统 L 中的一个赋值是一个函数 υ，υ 的定义域是 L 中的一切合式公式集，值域是 $\{T, F\}$，对 L 中任意公式 A、B，满足

(1) $\upsilon(A)=\neg\upsilon(\neg A)$

(2) $\upsilon(A\rightarrow B)=F$，当且仅当，$\upsilon(A)=T$ 和 $\upsilon(B)=F$. 这里的赋值说得通俗一点就是对 L 中的每一合式公式，赋以一个真、假值. 原来对命题变元 p_1，p_2……所作的真值指派，能使得 L 中的每个合式公式取 T, F 之一. 可见真值指派是满足条件（1）、（2）的一个赋值.

定义 2. 5　L 中的一个公式 A 是重言式，当

且仅当，对每一赋值 v，$v(A)=T$.

在证明可靠性定理前，先证一条引理.

引理 2.6 令 A、B 为 L 中的任意公式，如果 A 和 $A\rightarrow B$ 是重言式，那么 B 也是重言式.

证

假设：A 和 $A\rightarrow B$ 是重言式，而 B 不是重言式. 那么必定存在一个对出现在公式 A 和 B 中的命题变元的一个真值指派，使得 B 的真值为 F. 但是，由于 A 是重言式，当然对任何真值指派，A 总取值 T. 此时，这个真值指派却使公式 $A\rightarrow B$ 取值为 F. 这和 $A\rightarrow B$ 是重言式的假设是矛盾的. 因此，B 必定是重言式. □

可靠性定理 系统 L 中的每一定理都是重言式.

证

令 A 是 L 中的定理，当然存在 L 中对 A 的一个证明. 假设该证明是由 n 个公式组成的一个序列. 现在对 n 应用数学归纳法来证明定理.

归纳基础：

$n=1$ 时，即 A 在 L 中的证明只有一个公式. 显然 A 必为三个公理 (L_1)、(L_2)、(L_3) 之一. 通过构造真值表，可以证明它们都是重言式.

归纳步骤：

假设 L 中，其证明序列小于 n 的所有定理都

是重言式，要求推出 L 中证明序列为 n 的定理也是重言式．现在令 A 的证明序列为 n．即证明序列中的第 n 个公式就是 A，此时可能有几种情况：

情况 1：A 是公理，此时 A 当然是重言式．

情况 2：A 由证明序列中在前的两个公式，通过 MP 推得．此时，在前的两个公式必为：B 和 $B\to A$．因为它们在 A 的前面，当然对 B 和 $B\to A$ 所作的证明序列，是小于 n 的，根据归纳假设它们都是重言式，即 B 和 $B\to A$ 为重言式．再根据引理 2．6，A 也是重言式．

所以根据数学归纳法原则，L 中的每一定理都是重言式．□

定义 2.7 一个形式系统是一致的，当且仅当，对系统中的任何合式公式 A，A 和 $\neg A$ 不能都是 L 的定理．

显然，如果一个系统中，能找到某个公式 A．使得系统既能证明 A，又能证明 $\neg A$．这就达到了逻辑矛盾．一个系统，不论是明显地还是隐含地含有这样的逻辑矛盾，它就是不一致的．一致性和可靠性都是反映演算系统性能的，它们是对同一个问题的不同角度的反映．以下我们通过运用 L 的可靠性定理，来证明 L 的一致性定理．

一致性定理 命题演算系统 L 是一致的. 即对 L 中任一公式, A 和 $\neg A$ 不能都是演算 L 中的定理.

证

对于命题演算 L 中的任意公式 A 来说, 有时可能出现这样的情况, A 和 $\neg A$ 都不是重言式. 例如

$(p \rightarrow q)$

$\neg (p \rightarrow q)$

但是, A 和 $\neg A$ 同时是重言式的情况是不可能出现的. 因为如果 A 是重言式, 即常真, $\neg A$ 一定常假, 是矛盾式. 反之, 如果 $\neg A$ 是重言式, 常真, A 一定常假, 是矛盾式.

根据可靠性定理知道只有重言式, 才是 L 的定理. 而 A 和 $\neg A$ 不能同时是重言式, 就是说 A 和 $\neg A$ 不能同时是 L 的定理. 可见命题演算系统 L 是一致的. □

为证明完备性定理, 我们需要引进扩充、完全性等概念、和一些定理作准备.

定义 2.8 形式系统 $L*$ 是 L 的一个扩充, 当且仅当, $L*$ 是一个通过改变和扩大 L 的公理集而得的形式系统, 并且使得 L 的所有定理保持为 $L*$ 的定理.

由这个定义知道作为扩充的形式系统 $L*$,

尽管公理集可以和 L 不一样，但是它的定理要比 L 的定理多，至少要一样.

其次，我们根据定义知道 L 也可以看作是自身的一个扩充.

我们可以看一个例子，系统 L 有三个公理 (L_1)，(L_2) 和 (L_3)，当我们用

$(L_3{}')$ $((\neg A \to B) \to ((\neg A \to B) \to A))$

去替换 (L_3)，可以得到一个新的形式系统 L'. 可以证明 L' 保持了 L 中的一切定理，所以 L' 是 L 的一个扩充.

以后我们将会看到，L 的一个扩充和 L 可以没有共同的公理.

没有什么困难，我们可以把一致性的定义和判定定理推广到 L 的任意扩充. 如

定义 2. 9 L 的一个扩充是一致的：当且仅当，对 L 中的任何公式 A，A 和 $\neg A$ 不能都是扩充的定理.

定理 2. 10 令 $L*$ 是 L 的一致扩充，A 是 L 的合式公式且不是 $L*$ 的定理. 如果现在再构造 L 的扩充 $L**$，它通过对 $L*$ 补加 $(\neg A)$ 作为新公理而得到，那么 $L**$ 也是一致的.

证

我们应用反证法证明此定理. 思路是假设 $L**$ 不一致，并据之导致矛盾，从而证明 $L**$

是一致的.

令 A 为 L 中的一个合式公式，但不是 $L*$ 的定理. $L**$ 为如上所述的构造，假设 $L**$ 不一致. 那么，一定存在某个公式 B，使得

$$\vdash_{L**} B \qquad 且 \vdash_{L**} (\neg B)$$

据一致性定理的证明，有

$$\vdash_{L**} A$$

$L**$ 是 $L*$ 的扩充，它们不同处在于 $L**$ 有新公理 $(\neg A)$，当然 $(\neg A)$ 是 $L**$ 中的定理，但是 $(\neg A)$ 不是 $L*$ 的定理. 可见上式是等价于

$$(\neg A) \vdash_{L*} A$$

根据演绎定理，可以写成

$$\vdash_{L*} ((\neg A) \to A)$$

由于 T_4

$$\vdash_{L} (((\neg A) \to A) \to A)$$

也是 $L*$ 中的定理，即有

$$\vdash_{L*} (((\neg A) \to A) \to A)$$

通过分离规则 MP，就有

$$\vdash_{L*} A$$

这和合式公式 A 不是 $L*$ 中的定理矛盾，应该否定 $L**$ 不一致的假设，所以 $L**$ 是一致的. □

注意，这样的一致扩充可以一次一次的作下去，是否这样的扩充可以无限制的做下去呢？下面的定理将对此作出回答，一致的扩充是有限制的.

定义 2.11 L 的一个扩充是完全的，当且仅当，对于每一个合式公式 A，或者 A 或者 $(\neg A)$ 是扩充的定理.

显然，这里也包含了 L 本身完全性的定义. 我们马上可以告诉读者，命题演算形式系统 L 是不完全的. 例如，P 是的一个 L 合式公式，$\neg P$ 也是，但是它们都不是 L 的定理.

另外要注意 L 的不一致扩充一定是完全的. 因为对不一致扩充来说，一切合式公式都是它们的定理.

定理 2.12 令 $L*$ 是 L 的一致扩充，那么存在 $L*$ 的一个一致完全的扩充.

证

证明大体分四步：首先列出 L 的一切合式公式，并据以构造扩充 J_n，其次构造 J，然后证明扩充 J 的一致性和完全性.

首先把系统 L 中的一切合式公式，设法用自然数编号，排成序列：

A_0，A_1，A_2，……

通过集合论的方法，可以做到这一点，对 L^* 逐步补加新公理，构造扩充序列

J_0，J_1，J_2，……

具体作法是这样的：

令

$J_0=L^*$

如果

$\vdash_{J_0} A_0$，令 $J_1=J_0$

如果不能

$\vdash_{J_0} A_0$，

那么对 J_0 补加新公理（$\neg A_0$），得到 J_1.

一般地可以从 J_{n-1} 构造 J_n（$n\geqslant1$）：如果

$\vdash_{J_{n-1}} A_{n-1}$，那么 $J_n=J_{n-1}$

如果不能

$\vdash_{J_{n-1}} A_{n-1}$

那么对 J_{n-1} 补加新公理（$\neg A_{n-1}$），得到 J_n 显然由此方法构造的 J_n，一定是一致的．这可以用数学归纳法证明：

归纳基础：当 $n=0$ 时，J_0 就是 L^*，当然是一致的．

归纳步骤：现在归纳假设 J_{n-1} 是一致的，证明 J_n 也一致，这一点由定理 2.10 保证.

其次，我们来构造 J，它以一切 J_n 的公理为公理，也是 L^* 的一个扩充. 下面就是去证明 J 的一致性和完全性.

J 是一致的. 这一点我们用反证法来证. 先假定 J 不一致，然后导出矛盾，从而证明 J 的一致性.

假设 J 不一致，那么必存在一合式公式 A，使得

$$\vdash_J A \quad 且 \vdash_J (\neg A).$$

注意，当写出 J 中 A 和 $(\neg A)$ 的证明序列时，它们的公式一定是有限数目，因此，每个证明只用到 J 的公理的一部分，即用到有限个公理. 根据 J 的构成，这些公理中的每一个，必定属于 J_0，J_1，J_2，…，J_n，…中的一个，取 J_n 为足够大的扩充，就能含有证明序列中用到的全部公理. 因此有

$$\vdash_{J_n} A \quad 且 \vdash_{J_n} (\neg A).$$

这和 J_n 的一致性矛盾. 所以我们就证明了 J 的一致性.

J 是完全的. 现在令 A 是任意的合式公式，当然它必定是序列：A_0，A_1，A_2，…中的一个. 例如是 A_k. 如果

$$\vdash_{J_k} A_k$$

那么，当然有

$\vdash_J A_k$

如果不能

$\vdash_{J_k} A_k$

那么，根据 $J_{J_{k+1}}$ 的构造，必有 $\vdash_{Jk+1}$ $(\neg A_k)$

当然有

$\vdash_J$ $(\neg A_k)$

所以，在任何情况下，我们总有 $\vdash A_k$ 或 $\vdash$ $(\neg A_k)$．因此 J 是完全的．□

此定理可称一致完全扩充存在定理．它表明 L 的一致扩充是有限制的，J 是 L 的最大一致扩充．因为对于 L 中的任意公式 A，如果 A 不是 J 的定理，$\neg A$ 必定是 J 的定理，因此如果再通过补加 $\neg A$ 为新公理，得到的扩充仍然是 J.

现在我们来证明 L 的扩充中赋值的存在定理，这个定理证好后，马上就可得出 L 的完备性证明．

定理 2.13 如果 L^* 是 L 的一致扩充，那么存在一个赋值，使得 L^* 中的定理取值为 T.

证

首先我们来定义一个函数 v，它的定义域由 L 中的一切合式公式组成，值域为 $\{T, F\}$．

$v(A)=T$，$v(\neg A)=F$，当 $\vdash_J A$

$v(A)=F$，$v(\neg A)=T$，当 $\vdash_J (\neg A)$

这里的 J 是上面定理中构造的 L 的一致完全扩充．由于 J 是完全的，它保证了 v 对一切合式公式都是有意义的．

现在，我们来证明函数 v 满足赋值定义中的两个条件（1）$v(A)=\neg v(\neg A)$

（2）$v(A\to B)=F$，当且仅当，$v(A)=T$ 和 $v(B)=F$

先证满足条件（1）．由于 J 是一致的，所以对任意合式公式 A，A 和 $\neg A$ 不能都是 J 的定理．又考虑到 J 是完全的．A 和 $\neg A$ 中，必定有一是 J 的定理．也就是说，对任意 A

$$\vdash_J A \text{ 和 } \vdash_J (\vdash A)$$

有且仅有一式成立．如果 $\vdash_J A$，此时有

$$v(A)=T,\ v(\neg A)=F$$

当然，

$$v(A)=\neg v(A)$$

如果 $\vdash_J(\neg A)$，就有

$$v(A)=F,\ v(\neg A)=T$$

必有

$$v(A)=\neg v(A)$$

现在再证满足条件（2）

首先设 $v(A)=T$，$v(B)=F$，求证 $v(A\to B)=F$. 我们用反证法证明．设 $v(A\to B)=$

T，根据 υ 定义有

$$\vdash_J A,\ \vdash_J (\neg B) \text{ 和 } \vdash_J (A\to B)$$

由 $\vdash_J A$ 和 $\vdash_J (A\to B)$，通过 MP 可得：$\vdash_J B$

这和 $\vdash_J (\neg B)$ 矛盾．可见假设 $\upsilon(A\to B)=T$ 不能成立，所以 $\upsilon(A\to B)=F$.

再设 $\upsilon(A\to B)=F$，求证 $\upsilon(A)=T$ 或 $\upsilon(B)=F$. 也用反证法证明．假设 $\upsilon(A)=F$，或 $\upsilon(B)=T$，根据 υ 的定义有：

$\vdash_J (\neg (A\to B))$ $\vdash_J (\neg A)$，或 $\vdash_J B$. 由 (L_1) 得

$$\vdash_J (\neg A\to (\neg B\to \neg A))$$

也由 (L_1) 得

$$\vdash_J (B\to (A\to B))$$

由 $\vdash_J (\neg A\to(\neg B\to\neg A))$ 和 $\vdash_J (\neg A)$，通过 MP 得

$$\vdash_J (\neg B\to \neg A)$$

或者由 $\vdash_J (B\to A\to B))$ 和 $\vdash_J B$，通过 MP 得

$$\vdash_J (A\to B)$$

而通过对 $\vdash_J (\neg B\to\neg A)$ 和 (L_3) $\vdash_J ((\neg B\to \neg B)\to (A\to B))$ 用 MP，也可得

$$\vdash_J (A\to B)$$

这和 $\upsilon(A\to B)=F$ 矛盾．可见假设 $\upsilon(A)=F$，

或 v (B) $=T$ 都不能成立，所以 v (A) $=T$，且 v (B) $=F$.

至此，我们已经证明了 v 确实是一个赋值，现在令 A 为 $L*$ 的定理．因为 J 是 $L*$ 的一个扩充，显然有

$$\vdash_J A$$

因此，v (A) $=T$□

完备性定理 如果 L 中的合式公式 A 是重言的，那么 $\vdash_L A$.

证

令 L 中的合式公式 A 是重言的，我们用反证法，假设 A 不是 L 的定理．那么由 L 通过补加 ($\neg A$) 为新公理得到了扩充 $L*$，根据定理 2.10 $L*$ 是一致的．根据上面一致扩充赋值存在定理，一定存在一个赋值 v，使得 $L*$ 的定理都取值 T，从而有

$$v\ (\neg A) = T$$

但是，考虑到 A 是重言式，它对任何赋值都取值 T，因此对赋值 v 来说，也有

$$v\ (A) = T$$

这样就有了矛盾．可见假设 A 不是 L 的定理不能成立，所以

$$\vdash_L A$$

至此，我们已经证明了命题演算形式系统L，既是可靠的又是完备的，我们曾经说过用形式系统反映逻辑体系时，其性能优劣的标志是可靠性，其功能强弱的标志是完备性．现在L既是可靠的又是完备的，所以应该说它是一个性能优良，功能完备的形式系统．

命题演算L是可靠的，是指L中的定理都是重言式；L是完备的是指重言式都是L中的定理．笛卡尔创立解析几何学，在代数和几何学之间架起桥梁，既可通过数来研究形，又可通过形来研究数．可靠性、完备性定理也起到了这样的作用，在系统L中的定理和重言式之间架起了桥梁，使得既能通过对重言式的研究加深认识L中的定理；又能通过L中定理的研究加深对重言式的理解．更进一步说，系统中的定理是形式推演的结果，是形式的，重言式说的是符号表达式的意义，涉及到内容，可靠性、完备性的确立建立了形式和意义、形式和内容之间的联系，为深入理解这些范畴之间的辩证联系创造了条件．

2. 谓词逻辑

前面已经说到过谓词逻辑也是逻辑学的基础部分，它与命题逻辑不一样，不是以命题为基本

形式，而把命题再作分析．谓词逻辑的特征，是对简单命题再加以分析，分别其主词、谓词，考虑量词的全称和存在，区分一般和个别．此后，可以总结出它们的形式结构，再通过研究这些形式结构的逻辑性质，以及形式结构间的逻辑关系，从而导出相应的逻辑规律，这些就构成了谓词逻辑．谓词逻辑中的命题形式，推理形式和量词的特征密切相联，因此，它又称为量词逻辑．

普通逻辑中的假言推理、选言推理、联言推理、二难推理、关系推理以及某些三段论，可以用命题逻辑处理．因为谓词逻辑包括了命题逻辑，当然它也能处理上述推理．此外，谓词逻辑还能处理命题逻辑不能处理的推理，如换质法，换位法，换质换位法，三段论，依据“逻辑方阵”的直接推理等等．正因为谓词逻辑包括了古典形式逻辑中的直接推理和三段论，所以在亚里士多德的著作中，就已经有了较多的研究．斯多葛学派和中世纪逻辑学家，分别对谓词逻辑的研究也作出过一些推进，尽管比起他们在命题逻辑方面的贡献要逊色．直到弗雷格和罗素，才建立起了公理化、形式化的谓词逻辑，即谓词演算．

考虑到谓词逻辑中的命题形式，包括了词项，因而用原来命题逻辑中的符号来表述谓词逻辑已不敷应用，为此要引进个体词、谓词、量词等新

符号，这样才能构造出能用以表述谓词逻辑的形式语言．以下逐步介绍主词、谓词、量词及其符号表示．

所谓主词是命题中表示思维对象的词项．如

爱因斯坦是最伟大的现代物理学家．

其中专名爱因斯坦就是主词．又如

小明和霞妹是一对夫妻．

其中专名小明、霞妹都是个体词．当用 a，b，c 分别表示爱因斯坦，小明、霞妹时，上述命题可以写成：

a 是最伟大的现代物理学家．

b 和 c 是一对夫妻．

上面提到的“最伟大的现代物理学家”称为摹状词，它反映某一特定事物某方面的特征，通过对于特征的描述而指称该事物．专名和摹状词通常称为个体常项（即个体常元）．上面说到的‘a’，‘b’，‘c’，‘爱因斯坦’，‘小明’，‘霞妹’，‘最伟大的现代物理学家’都是常项．

变项（即变元）是能够表示某类特定事物中的任一个的词项，一般用 x，y 表示．对某一变项来说，它所相对的某类事物是确定的，但是变项到底表示该类事物中的那一个是不确定的．变项的语法功能类似于日常语言中代词和普通名词的功能．变项的逻辑功能是它能作为同异的标志，

它能表示形式结构.

至今我们已经考察过三种指称个体的词项：专有名词，摹状词和变项.现在我们把它们都称为项，并且对项作一定义.一个项是一语言表达式，它或者称呼、或者描述某个对象，或者当该表达式中的变项被专名、摹状词替换时，就成为一个对象的名称或摹状词.上述个体常项是项，变项‘x’和‘y’是项，‘$x+y$’也是项，因为当我们分别用‘2’和‘3’替换‘x’，‘y’时‘$x+y$’就成了‘2+3’，它是指称数5的表达式.

谓词是表示思维对象的属性(性质、关系)的词.说得具体一点，谓词乃是句子或子句中的一个词或一些词.大体可由几种方式构成：单独一个动词；一个动词加上一个副词或加上一个修饰它的副词子句；一个联系动词加上一个名词或一个形容词.例如‘跑步，‘跑得快’，‘是一个人’，‘是脾气不好的’都是谓词的例子.需要注意的是，在逻辑中，我们并不根据构成谓词的语法成分来区分谓词.事实上，甚至也没有给副词、形容词以任何地位.我们通常用大写拉丁字母表示谓词，对副词等根本不给任何符号.这样做，一般已经够用了.例如当用符号P表示谓词“是最伟大的现代物理学家”时，语句“爱因斯坦是最伟大的现代物理学家”，就可用符号写成

$P(a)$

当用 G 表示谓词“是一对夫妻”时，语句“小明和霞妹是一对夫妻”可以写成：

$G(b, c)$

P 表示一个对象的性质，所以称它为 1 元谓词，G 表示两个对象的一个关系，所以称它为 2 元谓词，依次可以有表示 n 个体之间关系的 n 元谓词，亦称 n 项、n 目谓词．

量词是命题中表示数量的词．有全称量词、存在量词两种．全称量词相当于自然语言中的‘一切’，‘所有’，‘凡’等．例如在命题：

凡事物都是变化的

中，‘凡’是全称量词．命题

对任一事物而言，它都是变化的．

当用 $(\forall x)$ 表示“对任一事物而言”，用 R 表示谓词“是变化的”，上述命题就可用符号写成

$(\forall x)\ R(x)$

命题

每一个人都是工人

相当于

对每一事物而言，如果他是人，那么他是工人．当用 $(\forall x)$ 表示“对每一事物而言”，用 M、W 分别表示“是人”、“是工人”．可用符号把上述命题写成：

$(\forall x)(M(x) \rightarrow W(x))$

考虑到 x 没有专门意义，也可写成

$(\forall y)(M(y) \rightarrow W(y))$

要注意上述两全称命题的有差别的符号表示．其原因在于论域的确定．

存在量词相当于自然语言中“有的”、“有”，“至少有一”等．在命题“有的事物是有新陈代谢的”．中，‘有的’是存在量词，当用 $(\exists X)$ 表示‘有的事物’，用 P 表示谓词‘是有新陈代谢的’，

上述可用符号写成

$(\exists x) P(x)$

量词的作用主要有两方面：一是可以区分变项的自由和约束；一是表达谓词逻辑中的各种命题形式．变元有自由和约束之分．我们看命题函数．

$x-3=0$

中的 x 是自由变元，它们不受量词约束．当我们以特定的值替换后，就得到一个有真假值的命题．例如，当以‘3’替换‘x’后得一真命题．

$3-3=0$

此时，把前述表达式看成是自变元为 x，函数值为命题的真假的函数表达式是可以的．约束变元是被量词约束的变元，如上列 $(\forall x) R(x)$ 中两个 x 都是约束变元．显然，当对命题函数中的所有

自由变元都以个体常项替换，或都加量词约束时，命题函数将成为命题．

在谓词逻辑中，由于对命题还要作分析，因此命题形式除包括原来符号外，还涉及个体词、谓词、量词符号．现将常见的几个命题形式例举如下：

单称命题形式，不含量词的单称命题形式，都可以分析为两类因素：个体词和谓词．例如，当用 a、b、c 表示个体常元，x、y、z 表示个体变元，P、Q、R 分别表示 1 元，2 元，3 元谓词时，

$$P(a),\ P(x),\ Q(b,c),\ R(x,y,z)$$

都是单称命题形式．

古典逻辑中的 A、E、I、O 可以用符号分别写成

A：$(\forall x)(S(x)\rightarrow P(x))$

E：$(\forall x)(S(x)\rightarrow\neg P(x))$

I：$(\exists x)(S(x)\wedge P(x))$

O：$(\exists x)(S(x)\wedge\neg P(x))$

表示全称或存在命题的表达式称为量化式．以下为量化式的否定式：

$$\neg(\forall x)F(x)$$

$$\neg(\exists x)(\forall y)R(x,y)$$

以下为否定式的量化式：

$$(\forall x)\neg F(x)$$

$(\exists x)(\forall y)\neg R(x, y)$

注意两者的区别，在于否定符号¬'放置在式中的位置．

以上列举了谓词逻辑中的命题形式，与命题逻辑相仿，可以写出谓词逻辑中的推理形式，它也是命题形式的一个有限序列．由于谓词逻辑中的命题形式比命题逻辑中的要复杂、丰富得多，因而包含的推理形式也要复杂、丰富得多．这里只能举个别的例：古典逻辑中全称否定命题的换位，其符号表达式可以写成：

$$\frac{(\forall x)(S(x)\rightarrow\neg P(x))}{(\forall x)(P(x)\rightarrow\neg S(x))}$$

三段论第一格 AAA 式，可以写成

$$(\forall x)(M(x)\rightarrow P(x))$$

$$\frac{(\forall x)(S(x)\rightarrow M(x))}{(\forall x)(S(x)\rightarrow P(x))}.$$

为建立完全形式化的谓词逻辑，即谓词演算，对所需的与刻划命题逻辑的形式语言不同的一阶形式语言，要作一些介绍．

首先，我们的语言应该能表述推演中涉及的一切个体，即要能表达个体域中的每个个体常元和个体变元．个体常元一般用加下标的小写字母

$$a_1, a_2\cdots$$

表示．个体变元用加下标的小写字母

$x_1, x_2, \cdots$

表示．为了表达一般的词项，还需一种能表达诸如‘x 区中最胖的人’，‘自然数 1 的后继’，‘x^2+y^2-4’这样一些词项中‘最胖的’，‘后继’，‘+”，‘—’的符号，我们称它们为函数符号．我们用

$f_1^1, f_2^1 \cdots; f_1^2, f_2^2, \cdots; \cdots$

表示．上标表示函数的自变元个数，下标区别自变元个数相同但又不相同的函数，如 f_i^n 表示第 i 个 n 元函数．

有了这些符号还只能表示项，还不能表达命题，为此需引进谓词和量词符号．谓词符号用

$P_1^1, P_2^1, \cdots; P_1^2, P_2^2, \cdots; \cdots$

表示．P_i^n 表示第 i 个 n 元谓词．全称量词和存在量词符号分别用$\forall$ 和$\exists$ 表示．

最后为了表示复合命题，还需引进命题联结词，我们沿用命题演算中的符号：

$\neg, \rightarrow$

一般地，我们把一阶语言 $\mathscr{L}$ 的初始符号列出如下：

$a_1, a_2, \cdots$	个体常元
$x_1, x_2, \cdots$	个体变元
$f_1^1, f_2^1 \cdots; f_1^2, f_2^2, \cdots; \cdots$	函数
$P_1^1, P_2^1, \cdots; P_1^2, P_2^2, \cdots; \cdots$	谓词
$\neg, \rightarrow$	联结词

$\forall$ 量词

(,) 括号

为完整列出形式语言，还须写出它的形成规则，在命题逻辑中只需规定与命题相应的公式，因此形成规则只包括合式公式的定义．在谓词逻辑中，除需规定公式的构造外，还需规定词项的构成．为此，要给出项和合式公式两个定义．其中项的定义也是定义合式公式的准备．

定义 2.14 一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的项是

(1) 个体常元、个体变元，或

(2) f_i^n $(t_1, \cdots, t_n)$，其中 f_i^n 是函数符号；t_1，$\cdots t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项．

(3) 所有的项由 (1)、(2) 生成．

定义：$\mathscr{L}$ 中的原子公式是这样的一符号串 P_i^n $(t_1, \cdots, t_n)$，其中 P_i^n 是谓词符号，t_1，$\cdots$，t_n，是 $\mathscr{L}$ 中的项．

定义 2.15 $\mathscr{L}$ 中的合式公式是

(1) $\mathscr{L}$ 中的每个原子公式，或

(2) $(\neg A)$，$(A \rightarrow B)$，$(\forall x_i) A$，其中 A、B 是合式公式，x_i 是任意个体变元．

(3) $\mathscr{L}$ 中的所有合式公式由 (1)、(2) 生成．

项是形式语言 $\mathscr{L}$ 中的符号表达式，它可以解释成这样一些对象，或者是函数作用的对象、或者是

具有某种属性的对象，或者是对它有所断定的对象．也就是说项可以解释成专名和摹状词．原子公式在语言中，是能解释为性质判断的最简单的语言表达式．合式公式的解释是命题．

在合式公式（$\forall x_i$）A 中，A 是量词的辖域．也可以这样说，当量词后无括号时．量词后的最短公式是辖域；如量词后有括号，该对括号内的公式是量词的辖域．我们说个体变元 x_i 在公式中的一次出现是约束的，如果它出现在量词（$\forall x_i$）中，或在它的辖域中；如果变元的一次出现不是约束的，那么这次出现是自由的．下面提到的概念，对谓词演算中一些规则的正确使用很重要．希望引起注意．令 A 是 $\mathscr{L}$ 中的任意公式，我们说一个项 t 对 A 中的 x_i 是自由的，如果 x_i 不自由出现在公式 A 的量词（$\forall x_i$）的辖域中，x_i 是出现在 t 中的任意变元．

有了上述的初始符号和形成规则，再进一步给出初始公式和变形规则，我们就可得到完全形式化的谓词演算．不过我们这里需要中断一下，待引进赋值、满足、真、解释、模型等一系列语义概念后再讲演算．

把逻辑处理成演算，可以要求完全不提及符号表达式的意义和涵义，但是这并不等于否认符号的意义．其实，对逻辑作形式的研究，到一定

阶段时，还是要回过头来考察一下符号的解释，符号的意义，以便加深对形式符号和内容意义之间关系的认识．这里涉及符号表达式和它的意义之间关系的研究，这种研究称为语义学的研究．真、解释、模型等语义学基本概念，就是这种研究深入的结果．

所谓一种语言的解释，就是确定该种语言里的符号表达式怎样同某个现实的或可能的世界之间的联系．这里说的语言可以是像汉语、英语那样的自然语言，也可以是 $\mathscr{L}$ 那样的人工制造的形式语言．拿我们要用的语言 $\mathscr{L}$ 来说，给出的初始符号表达式有七种，大体可以分为三种类型．个体常元，个体变元，函数，谓词符号称为指词符号；联结词、量词称为逻辑符号；还有一类是括号．一语言的解释，主要是确定语言中指词符号和世界的联系．它们随着所取的世界不同，可以有完全不同的意义．逻辑符号和括号的意义是不变的．所以我们也可以说：给出语言的一个解释，就是给出语言中指词符号所指称的那个世界中的对象．表达式所指称的对象是表达式的外延，所以还可以说解释就是给出语言中指词符号的外延．

语言 $\mathscr{L}$ 中的个体符号指称可能世界中的某个体．谓词符号指称集合：1 元谓词指称可能世

界中由个体组成的集合；2 元谓词指称由个体的有序对组成的集合；…，n 元谓词指称由个体的 n 元有序组织成的集合．函数符号也指称集合，不过是满足某些条件的集合，它也要根据变元数目的不同，指称不同的集合．一旦这样的指称确定，解释也就确定．有了这些准备，我们可以给出解释的一般定义．

定义 2.16 $\mathscr{L}$ 的一个解释 I 是由一个非空集合 D_I，一组特指元素（$\overline{a_1}$，$\overline{a_2}$，…），一组定义在 D_I 上的函数（$\overline{f_1^1}$，$\overline{f_2^1}$，…；$\overline{f_1^2}$，$\overline{f_2^2}$，…；…）一组定义在 D_I 上的关系（$\overline{P_1^1}$，$\overline{P_2^1}$，…；$\overline{P_1^2}$，$\overline{P_2^2}$，…；…）一起组成的．

其中集合 D_I 就是个体域，也称论域，也可以说可能世界，即一种世界可能的存在方式．在日常谈话中，通常可用场合、情况等词．例如《红楼梦》所描绘的小说中的世界就是一种可能世界．特指元素是个体域中一些特定的成员，它们是 $\mathscr{L}$ 中个体常元的指称对象、外延．类似地，这里所说定义在 D_I 上的函数和关系，是 $\mathscr{L}$ 中函数符号和谓词符号的指称对象．注意，同一个形式语言，可以有实质上不同的解释．

在前面给出的解释定义中，只是原则上给出了语言 $\mathscr{L}$ 中各类符号的指称对象．对 $\mathscr{L}$ 中的项并没有指定确定的对象，只有当对 $\mathscr{L}$ 中的每个项

都指定确定的对象后，也就是赋于每个项以确定的值后，才能为确定一阶语言中的一切公式的真、假提供条件.

定义 2.17 在解释 I 中的一个赋值是一个满足条件（1)、(2）的一个函数 v，它的定义域是 $\mathscr{L}$ 中的项集合，值域是 D_I.

（1） $v(a_i)=\overline{a_i}$ 对 $\mathscr{L}$ 中的每个个体常元 a_i

（2） $v(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))=\overline{f_i^n}(v(t_1),\cdots,v(t_n))$，其中 f_i^n 是 $\mathscr{L}$ 中的任意函数符号，$t_1,\cdots,t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 中的任意项.

注意：条件（1）表明 $\mathscr{L}$ 中个体常元 a_i 的指称对象是论域 D_I 中固定的个体. 对解释 I 的各种赋值，这种对应关系是不变的. 条件（2）表明，赋值是保运算不变的，即项 t_1，…，t_n 先经过 f_i^n 运算，然后赋值，与先在赋值 v 之下取 t_1，…，t_n 的象之后，再进行 $\overline{f_i^n}$ 运算，所得结果相同. 条件（1)、（2）分别为常元 a_i 和任意项 $f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 指派了对象. 但是 $\mathscr{L}$ 中还有另外一些项，它们是个体变元 x_i，定义并没有为它们指派对象，一旦当对 x_i 也都指派了对象时，$\mathscr{L}$ 中的一切项就都有了象. 因此一旦对个体变元 x_1，x_2…指派了象 $v(x_1)$，$v(x_2)$，…时，一个赋值就完全确定了. 当然对 x_i 可以指派不同的象，因而在同一解释 I

中可以有满足赋值条件（1）、（2）的许多不同的确定的赋值．下面介绍的i—等值赋值，就是不同的赋值的实例，并且它还有许多重要应用．

今有两个赋值v，v'，它们分别由序列

$v(x_1)=b_1$，$v(x_2)=b_2$，…，$v(x_i)=b_i$，…

$v'(x_1)=b_1$，$v'(x_2)=b_2$，…，$v'(x_i)=b'_i$…

给定．它们除对第i个变元x_i的赋值$v(x_i)$，$v'(x_i)$可以不同外，对所有其他变元x_j（$j\neq i$），都有

$v(x_j)=v'(x_j)$

我们就称v和v'是i—等值的，或称v' i—等值于v.

定义 2.18　令 I 是$\mathscr{L}$的一个解释，A是$\mathscr{L}$中的一个合式公式．I 中的一个赋值v满足A，如果它归纳地遵循下列四条件：

（1）v满足原子公式$P_j^n(t_1, \cdots, t_n)$，当且仅当，$\overline{P}_j^n(v(t_1), \cdots, v(t_n))$在$D_I$中真．

（2）v满足（$\neg B$），当且仅当，v不满足B.

（3）v满足（$B\rightarrow C$），当且仅当，v满足（$\neg B$），或v满足C.

（4）v满足（$\forall x_i$）B，当且仅当，每个i—等值于v的赋值v'满足B.

需要说明，公式 A 对于任何赋值 v，只可能或者 v 满足 A，或者 v 满足 $(\neg A)$，但不能两者都满足．$\mathscr{L}$ 中的一个公式 A，如果至少存在一个解释中的一个赋值满足 A，我们就称 A 是可满足的．下面准备引进关于命题（语句）的几个层次的真的概念．包括解释真、逻辑真．考虑到可满足也可称为赋值真，这里就有了三个层次的真，它们的内涵按赋值真、解释真、逻辑真次序递增．

定义 2.19 一个 $\mathscr{L}$ 中的公式 A 对解释 I 真，当且仅当，解释 I 中的每个赋值都满足 A，此时我们亦称解释 I 为公式 A 的模型．A 对解释 I 假，当且仅当，I 中没有一个赋值满足 A．A 在 I 中真，我们用记号 $I \models A$ 表示．注意 $\models$ 和 $\vdash$ 一样都是元语言中的记号，它们不同处是 $\vdash$ 只涉及形式，而 $\models$ 却和符号的意义、公式的真假相联．由于对某个特殊的公式来说，有可能存在 I 中某些赋值满足它，某些赋值不满足它，这样的公式对解释 I 既不真也不假．从定义也可以知道解释真比可满足要求高，解释真必可满足，但是可满足不必解释真．考虑到同一个赋值，不能既满足 A，又满足 $(\neg A)$．因此不可能存在任何公式 A，A 和 $(\neg A)$ 皆对解释 I 真．

定义 2.20 $\mathscr{L}$ 中的一个公式 A 是普遍有效的，当且仅当，A 在 $\mathscr{L}$ 的每一个解释中皆真．A

是矛盾的，当且仅当，A 在 $\mathscr{L}$ 的每一个解释中皆假．普遍有效亦称逻辑真，矛盾式亦称逻辑假公式．

有一种特殊的逻辑真公式，我们在这里也称它为重言式，它是命题逻辑中重言式概念的推广．命题逻辑 L 中的重言式 A_0．当对其中每个命题变元都用 $\mathscr{L}$ 中的一个公式代入后，所得的公式 A 称为谓词逻辑中的重言式．可以证明，这种重言式是逻辑真公式．

定义 2.21 令 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一组公式，I 为 $\mathscr{L}$ 的一个解释，如果 Γ 中的每个公式都对解释 I 真，就称 I 为 Γ 的一个模型，可用 $I\models\Gamma$ 表示．定义适用于 Γ 只有一个公式的情况，如 A 是这样的情况，此时，I 是 A 的模型与 A 对 I 解释真意义是相同的．为以后应用方便起见，我们不加证明地罗列几条性质：

性质 1：如果在一特殊解释 I 中，$\mathscr{L}$ 的公式 A，$(A\rightarrow B)$ 皆真，那么 B 对 I 也真．

性质 2：若 A，$(A\rightarrow B)$ 普遍有效，那么 B 也普遍有效．

性质 3：令 A 是 $\mathscr{L}$ 中的公式，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，我们有：$I\models A$，当且仅当，$I\models(\forall x_i)A$．其中 x_i 是 $\mathscr{L}$ 中的任意个体变元．

性质 4：A 是 $\mathscr{L}$ 中的公式，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解

释．如果v和ω是I中的两个赋值，并且对A中每个自由变元x_i，都有$v(x_i)=\omega(x_i)$，那么就有：v满足A，当且仅当，ω满足A.

性质5：如果A是$\mathscr{L}$中的闭公式，I是$\mathscr{L}$的一个解释，那么，或者$I\models A$，或者$I\models(\neg A)$，但不能两者皆成立．这里的闭公式A是指A中不出现任何自由个体变元．

性质6：令$A(x_i)$是$\mathscr{L}$中的公式，x_i自由出现，t是一个项，且在$A(x_i)$中对x_i自由，假设v和v'是i一一等值的两个赋值，且

$$v'(x_i)=v(t)$$

那么

v满足$A(t)$，当且仅当，v'满足$A(x_i)$.

3. 谓词演算和完备性定理

谓词演算是谓词逻辑的形式公理系统，可以仿照命题演算的顺序，对谓词演算作平行的讨论．下面介绍的谓词演算K是用一阶形式语言表述的．K系统也有四个组成部分：初始符号、形成规则、初始公式和变形规则，前面两部分，在介绍一阶语言$\mathscr{L}$时已经叙述过，这里不再重复．下面给出后两部分：

初始公式（公理）：令A、B、C是$\mathscr{L}$中的任

意合式公式，

(K_1) $(A\to(B\to A))$

(K_2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(K_3) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

(K_4) $(\forall x_i)A(x_i)\to A(t)$)，其中 $A(x_i)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，t 是 $\mathscr{L}$ 中的一个项且在 $A(x_i)$ 中对 x_i 自由．

(K_5) $(\forall x_i)(A\to B)\to(A\to(\forall x_i)B)$，如果 A 不含变元 x_i 的自由出现．

注意，它和命题演算一样，也是公理模式，每一个都有无限多实例．

变形规则：

(1) 分离规则：即从 A 和 $(A\to B)$，可以推得 B，其中 A、B 现在是 $\mathscr{L}$ 中的任意合式公式．

(2) 全称概括，即从 A 可推得 $(\forall x_i)A$，其中 A 为 $\mathscr{L}$ 中任意公式，x_i 是任意个体变元．

由于谓词演算系统 K 包括了命题演算 L 的所有初始公式和变形规则，命题演算成了谓词演算的子系统．命题演算的定理都成了谓词演算的定理．

对证明、演绎、定理、后承可作与命题演算完全类同的定义，这里从略．下面不加证明地叙述两条定理．

重言定理 如果 A 是 $\mathscr{L}$ 的重言式，那么 A

是 K 的定理．

演绎定理 令 A、B 是 $\mathscr{L}$ 的公式，Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一组公式（可能为空集），如果：$\{\Gamma, A\} \vdash_K B$，并且在推演中自由变元保持不变，那么有：$\Gamma \vdash_K A \to B$.

所谓“在推演中自由变元保持不变”，是指“对依赖于前提的任何公式中的自由变元，没有引用过全称概括规则”．演绎定理的优点是显然的，它可以变前提少（一个 Γ）结论复杂（$A \to B$）的推演，为前提多（$\{\Gamma, A\}$）结论简单（一个 B）的推演．在简化谓词演算的推演方面起重要作用．

推论 对 $\mathscr{L}$ 中的任何公式 A、B、C，有

$$(\{A \to B\}, (B \to C)\} \vdash_K (A \to C)$$

定理 2.22 （全称限定）如果 t 在 $A(x_i)$ 中对 x_i 自由，那么：

$$(\forall x_i) \forall (x_i) \vdash_K A(t)$$

定理 2.23 （存在概括）如果 t 在 $A(x_i)$ 中对 x_i 自由，那么：

$$A(t) \vdash_K (\exists x_i) \forall (x_i)$$

定理 2.24 （存在限定）令 a_j 为个体常元，有

$$(\exists x_i) A(x_i) \vdash A(a_j)$$

以下介绍系统 K 中的定理：

T_{101}: $\vdash (\forall x_i)(A(x_i) \vee \neg A(x_i))$

T_{102}: $\vdash (\forall x_1)(P_1^1(x_1) \to P_1^1(x_1))$

T_{103}: $\vdash ((\forall x_i)(A \to B) \to ((\forall x_i)A \to (\forall x_i) B))$.

T_{104}: $\vdash (\forall x_i)(A \vee B) \to ((\forall x_i)A \vee (\forall x_i) B)$

T_{105}: $\vdash (\forall x_i)(A)x_i) \wedge B(x_i)) \to ((\forall x_i)A (x_i) \wedge (\forall x_i)B(x_i))$

T_{106}: $\vdash ((\forall x_i)A(x_i) \wedge (\forall x_i)B(x_i)) \to (\forall x_i)(A(x_i) \wedge B(x_i))$

T_{107}: $\vdash C(\forall x_i)(A(x_i) \wedge B(x_i)) \leftrightarrow ((\forall x_i)A (x_i) \wedge (\forall x_i)B(x_i)$

T_{108}: $\vdash (\forall x_i)(A(x_i) \leftrightarrow B(x_i)) \leftrightarrow ((\forall x_i)A (x_i) \leftrightarrow (\forall x_i)B(x_i))$

T_{109}: $\vdash (\exists x_i)A(x_i) \leftrightarrow \neg (\forall x_i) \neg \forall (x_i)$

T_{110}: $\vdash (\exists x_i) \neg A(x_i) \leftrightarrow \neg (\forall x_i)A(x_i)$

T_{111}: $\vdash \neg (\exists x_i) \neg A(x_i) \leftrightarrow (\forall x_i)A(x_i)$

T_{112}: $\vdash \neg (\exists x_i)A(x_i) \leftrightarrow (\forall x_i) \neg A(x_i)$

$T_{113} \vdash (\forall x_i)(A \to B) \to (\exists x_i)A \to (\exists x_i)B)$

T_{114}: $\vdash (\forall x_i)(A \leftrightarrow B) \to ((\exists x_i)A \leftrightarrow (\exists x_i) B)$

T_{115}: $\vdash (A \to (\forall x_i)B) \to (\forall x_i)(A \to B)$，其中 x_i 在 A 中不自由出现.

T_{116}: $\vdash (\forall x_i)(A\to B)\leftrightarrow(A\to(\forall x_i)B)$，

T_{117}: $\vdash (A\lor(\forall x_i)B)\to(\forall x_i)(A\lor B)$

T_{118}: $\vdash (\forall x_i)(A\lor B)\to(A\lor(\forall x_i)B)$

T_{119}: $\vdash (\forall x_i)(A\lor B)\leftrightarrow(A\lor(\forall x_i)B)$

T_{120}: $\vdash (\forall x_i)(A\land B)\leftrightarrow(A\land(\forall x_i)B)$，其中 x_i 在 A 中不自由出现.

T_{121}: $\vdash (\exists x_i)(A\lor B)\leftrightarrow(\exists x_i)A\lor(\exists x_i)B)$

T_{122}: $\vdash (\exists x_i)(A\land B)\leftrightarrow(\exists x_i)A\land(\exists x_i)B)$

构造谓词演算系统 K 与构造命题演算系统 L 一样，也想用形式语言表述的形式推理，去反映用日常语言叙述的逻辑推理，它同样会碰到可靠性与完备性的问题．这里的可靠性是指，演算 K 中的定理都是普遍有效的，完备性是指普遍有效公式皆是 K 中的定理．我们可以先告诉大家，结论是一阶谓词演算 K 既是可靠的，又是完备的．于是我们也就知道，K 的定理类和普遍有效公式类是相同的，K 恰好到处地反映了日常的推理.

可靠性定理 对 $\mathscr{L}$ 中的任意公式 A，如果 A 是系统 K 中的定理，那么，A 是普遍有效公式.

证明的思路是这样的，先证系统 K 的初始公式（公理）皆是普遍有效公式；然后再证 K 的变形规则具有保普遍有效性．即如果变形前的公式普遍有效，则变形后的公式也普遍有效．考虑到此定理的证明思路与命题演算中可靠性定理的证明思路完全雷同，这里就不证了．又因为完备性定理的证明，尽管和命题演算中完备性定理的证明也有相似之处，但它有许多本质上独特的处理，另外最早由哥德尔证明的一阶逻辑的完备性定理，是数理逻辑基干部分完成的标志，我们这里还是较详细地叙述它的证明．证明步骤是这样的，先定义几个要用的概念，然后证明四条引理，最后证明完备性定理本身．

定义 2.25 K^* 是 K 的一个扩充，当且仅当，K^* 是一个通过改变和扩大 K 的公理集而得的形式系统，并且使得 K 的定理仍保持为 K^* 的定理．

定义 2.26 对某个一阶语言来说，所谓一阶系统是指 K 的一个扩充．

定义 2.27 一阶系统 S 是一致的，如果不存在任何合式公式 A，使得 A 和 $(\neg A)$ 皆为 S 的定理．

定义 2.28 一阶系统 S 是完全的，如果对于每个闭公式 A，或者 $\vdash_S A$，或者 $\vdash_S (\neg A)$．

据此，显然可知 K 是不完全的．

引理 2.29 令 S 是一致的一阶系统，A 为一闭公式且不是 S 的定理. 如果 S^* 是通过对 S 补加 $(\neg A)$ 为新公理而得的扩充，那么 S^* 也一致.

引理 2.30 令 S 是一致的一阶系统，那么 S 存在完全的一致扩充.

引理 2.31 如果 S 是 K 的一致扩充，那么 S^+ 也是一致的.

引理 2.32 如果 S 是 K 的一致扩充，那么存在 $\mathscr{L}$ 的一个解释，S 的每个定理对该解释皆真. 前三个引理的证明比较简单，引理 2.32 的证明十分复杂，但是它却又是完备性定理证明的关键.

引理 2.29 的证明：

应用反证法. 假设 S^* 不一致，推出矛盾，从而推得 S^* 一致，证明定理.

设 S^* 不一致，就是说存在某个公式 B，使得 B 和 $(\neg B)$ 皆为 S^* 中定理，即有

$$\vdash_S * B \quad 且 \vdash_S * (\neg B)$$

现在看 $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$，由于是重言式，所以是 K 的定理，当然也是 K 的扩充 S^* 的定理. 所以有

$$\vdash_S * (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$$

通过 MP，有

$$\vdash_S * (B \rightarrow A)$$

再通过 MP，有

$\vdash_{S} * A$

考虑到 S^* 中的一个证明也是 S 中以（$\neg A$）为前提的一个演绎，即有：

$(\neg A) \vdash_{S} A$

应用演绎定理有：

$\vdash_{S} ((\neg A) \rightarrow A)$

由于 $((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$ 为重言式，是 S 的定理，即

$\vdash_{S} (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A)$

与上式分离得

$\vdash_{S} A$

这和本引理的条件：A 不是 S 的定理相矛盾．所以 S^* 是一致的．

引理 2．30 的证明：

证明与 L 中的相应定理的证明是一样的，S_∞ 是一致的且完全的．只需补充一下构造 S_∞ 的说明即可，令 $\mathscr{L}$ 中一切闭公式的枚举为：

——A_0，A_1，…，A_n，…

我们如下构造 K 的扩充序列

S_0，S_1，…，S_n，…

其中 S_0 是 S．对 $n>0$ 时，如果 $\vdash_{sn-1} A_{n-1}$，令 S_n 相同于 S_{n-1}；如果 $\vdash_{sn-1} A_{n-1}$ 不成立，就令 S_n 为通

过对 S_{n-1} 初加（$\neg A_{n-1}$）为新公理而得的扩充．由引理 2．29 知：每个 S_n 都是 K 的一致扩充．构造一阶系统 S_∞，它的公理由这样的公式组成，这种公式至少是 S_n 中某一个的公理．

为建立引理 2．31，需要引进放大．至今我们所使用的语言 $\mathscr{L}$ 是固定的，其中个体常元为 a_1，a_2，…．现在我们添加新的个体常元 b_0，b_1，…．这样一来，$\mathscr{L}$ 的个体常元当然要增加，随着也增加了许多新的公式，其中包括新的公理和新的定理．如新的公式（$\forall x_1$）P_1^1（x_1）$\rightarrow P_1^1$（b_0）就是放大后的系统中的新公理．我们把添加过新常元 b_0，b_1，…的新语言 $\mathscr{L}^+$ 称为 $\mathscr{L}$ 的放大．相应于 $\mathscr{L}^+$ 的系统 K^+ 是 K 的放大，S^+ 是 S 的放大．

引理 2．31 的证明：

我们使用反证法．假设 S^+ 不一致，那么必定存在某个公式 A，使得 A 和 $\neg A$ 都是 S^+ 的定理．由于 S^+ 中对 A，$\neg A$ 的证明序列都是由有限个公式组成的，因而在证明中只可能涉及 b_0，b_1，…中有限个．这样，我们只需对其中出现的有限个新常元，处处代之以证明中没有出现过的个体变元．我们就把 S^+ 中的证明转换成了 S 中的证明．既然在 S 中也能证明 A，$\neg A$，那么 S 就不是一致的系统，这和引理的条件矛盾．由此可见 S^+ 是一致的．

引理 2．32 的证明：

这引理证明复杂，为便于把握，我们将证明划分为三个部分.

第一部分：从 S^+ 出发，在定理设置的某些条件下构造扩充序列 S_0，S_1，S_2，…；并在此基础上构造一致的扩充 S'，然后再从 S' 出发构造一致的完全扩充 T.

第二部分：建立语言 $\mathscr{L}$ 的放大 $\mathscr{L}^+$ 的内解释 I，并且对于 $\mathscr{L}^+$ 中任意闭公式 A，证明：

$$\vdash_T A，当且仅当，\mathrm{I} \models A$$

意指公式 A 为完全的一致扩充 T 中定理的充要条件：A 在内解释 I 中真.

第三部分：对已获得的结果，作概括、分析，完成引理本身的证明.

要注意，第一、二部分中出现的 T 是同一的. 第一部分是第二部分的准备. 第三部分是对第二部分的加工. 可见证明的关键部分是第二部分.

现在进行证明.

令 $\mathscr{L}^+$ 是由 $\mathscr{L}$ 添加新常元 b_0，b_1，b_2，…后的放大. S^+，K^+ 相应地是 S 和 K 的放大. 根据引理 2.31 知道，S^+ 是一致的. 现在我们从 S^+ 出发，来定义一阶系统的一个序列如下：

首先我们枚举出 $\mathscr{L}^+$ 中所有只包含一个自由变元的合式公式；如

F_0（x_{i0}），F_1（x_{i1}），…

其中自由个体变元 x_{i0}，x_{i1}…不必一定相异．现在我们要从 b_0，b_1，b_2，…中挑选出一个子序列 c_0，c_1，c_2，…，使得：

（1）c_0 不出现在 F_0（x_{i0}）中，

（2）对于 $n>0$，$c_n \notin \{c_1 \cdots, c_{n-1}\}$，并且 c_n 也不出现在下列任一公式中：

F_0（x_{i0}），…，F_n（x_{in}）

这样的挑选是能够实施的，因为每一个合式公式，你一旦写出它时，它至多包括有限个新常元．

对每个 K，我们写出 G_k：

（┐（$\forall$ x_{ik}）　F_k（x_{ik}）→┐ F_k（C_k）现在可以构造一阶系统的一个序列了．

令 S_0 是 S^+

令 S_1 是对 S_0 补加 G_0 为新公理后得到的扩充．

令 S_n（对每个 $n>1$ 来说）是对 S_{n-1} 补加 G_{n-1} 为新公理而得到的扩充．下面我们来证明；对任意 n 来说，S_n 是一致的．通过对 n 应用数学归纳法证明这一点

归纳基础：

S_0 是一致的，因为 S_0 就是 S^+．由引理 2．31 知它是一致的．

归纳步骤：

现在设 S_n 是一致的，其中 $n>0$，要求证明 S_{n+1} 也是一致的．这里我们使用反证法，假设 S_{n+1}

不一致，推得矛盾，从而证明 S_{n+1} 的一致性.

设 S_{n+1} 不一致，即是说 $\mathscr{L}^+$ 中必有一公式 A，使得

$$\vdash_{s_{n+1}} A \text{ 且 } \vdash_{s_{n+1}} (\neg A)$$

由于 $(A \to (\neg A \to \neg B))$ 是重言式，所以有 $\vdash_{s_{n+1}} (A \to (\neg A \to (\neg B)))$

通过对上面公式，作两次 MP，即有

$$\vdash_{s_{n+1}} (\neg A \to \neg B)$$

$$\vdash_{s_{n+1}} (\neg B)$$

由于对于任何合式公式 B，上述推演都成立，特别地对 $\neg G_n$，上述推演也成立，所以有

$$\vdash_{s_{n+1}} (\neg G_n)$$

考虑到在 S_{n+1} 中的证明，恰好是在 S_n 中以 G_n 为前提的演绎，所以有

$$G_n \vdash_{s_n} (\neg G_n)$$

由于 G_n 是闭公式，没有自由变元. 所以可用演绎定理得到：

$$\vdash_{s_n} (G_n \to (\neg G_n))$$

再应用重言式（$(G_n\ (\neg G_n)) \to (\neg G_n)$）是 S_n 的定理，即

$$\vdash_{s_n} ((G_n \to (\neg G_n)) \to (\neg G_n))$$

通过 MP 有

$$\vdash_{s_n} (\neg G_n)$$

即

$$\vdash_{s_n} \neg (\neg (\forall x_{in}) F_n (x_{in}) \rightarrow \neg F_n (c_n))$$

再应用重言式定理，有

$$\vdash_{s_n} + (\neg (\neg (\forall x_{in}) F_n (x_{in}) \rightarrow \neg F_n (c_n)) \rightarrow \neg (\forall x_{in}) F_n (x_{in}))$$

和

$$\vdash_{s_n} (\neg (\neg (\forall x_{in}) F_n (x_{in}) \rightarrow \neg F_n (c_n)) \rightarrow F_n (C_{in}))$$

因为它们都是重言式，通过 MP，我们就有

$$\vdash_{s_n} \neg (\forall (x_{in}) (F_n (x_{in}) \qquad (*)$$

和

$$\vdash_{s_n} F_n (c_n)$$

我们来看上式，只需用证明中没有出现过的变元 y 去替换常元 c_n 的每个出现，我们就得到了 $F_n(y)$ 在 S_n 中的证明，这是因为 c_n 并不出现在 G_0，G_1，$\cdots G_{n-1}$，中，而 $F_n(c_n)$ 在 S_n 中的推演用到这些公理．这样就有

$$\vdash_{s_n} F_n (y)$$

因此，通过全称概括 UG，就有

$$\vdash_{s_n} (\forall y) F_n (y)$$

考虑到 y 在 $F_n(y)$ 中自由，且 x_{in} 是不在 F_n

(y) 中自由或约束出现的变元，所以有

$$\vdash_{S_n} (\forall x_{in}) F_n(x_{in})$$

在 S_n 中既然本式和公式（*）都成立，S_n 就是不一致的，这和归纳假设 S_n 是一致的矛盾. 因此，我们得到结论：对于任意 $n\geqslant 0$，如果 S_n 一致，那么 S_{n+1} 也一致.

由数学归纳法知对于任意 n，S_n 是一致的. 令 S' 是以 $\mathscr{L}^+$ 的至少是 S_n 之一的公理的一切合式公式为公理而构成的，S' 显然是一致的，因为如果它不一致，那么只用它的有限多个公理就可以推导出一个矛盾，所以必然会出现这样的情况，对于某一个适当大的 n，在 S_n 内也将会导出矛盾. 这和已经证明过的 S_n 是一致的结论不能相容了. 然后，再据引理 2.30，可以在此基础上构造一致而又完全的扩充 T. 至此，我们完成了引理 2.32 证明的第一部分。下面转入证明的第二部分，我们先建立 $\mathscr{L}^+$ 的内解释 I，然后证明它具有某种性质.

我们现在建立 $\mathscr{L}^+$ 的解释的方式和以往有所不同，希望引起注意，以往我们已接触过一些具体的解释. 一般来说，论域是由一些数学对象，如自然数、整数等组成，这些对象都在语言之外，这些解释可以称为外解释. 考虑到解释的定义，对论域只有一个要求：非空，至于论域中元素为何

物并没有限制，那么我们可否用语言中的东西作为论域的元素来构造解释呢，回答是肯定的．我们将要建立的$\mathscr{L}^+$的解释 I|=，其论域 D_I 就是由闭项组成．所谓闭项是$\mathscr{L}^+$中这样一些项，它们不含任何自由个体变元，具体地说，闭项是由一切个体常元以及由它们通过函数运算得出的一切项组成．显然，闭项和自然数等有一根本差别，前者是语言内的，后者是语言外的．所以我们也就把我们将要建立的解释 I 称为内解释，以示其解释域（论域）是由语言内的材料组成．

现在我们来建立$\mathscr{L}^+$的内解释 I.

(1) I 的论域由$\mathscr{L}^+$的一切闭项组成.

(2) 个体常元是它们自己的解释.

(3) 对于论域 D_1 中的元素（即对于闭项）d_1，…，d_n，

$\overline{P}_i^n(d_1,\cdots d_n)$成立，如果$\vdash_T P_i^n(d_1,\cdots,d_n)$

$\overline{P}_i^n(d_1,\cdots d_n)$不成立，如果$\vdash_T \neg P_i^n(d_1,\cdots,d_n)$

这里的 T 就是第一部分中构造的一致的完全扩充，因为它是完全的且 P_i^n 为闭公式，所以$\vdash_T P_i^n(d_1,\cdots,d_n)$，$\vdash_T \neg P_i^n(d_1,\cdots,d_n)$必有一成立.

(4)对于闭项 $d_1,\cdots,d_n$，$f_i^n(d_1,\cdots,d_n)$的解释$\overline{f}_i^n(d_1,\cdots d_n)$，显然由于 $d_1,\cdots d_n$ 是闭项，$f_i^n(d_1,\cdots d_n)$也是闭项.

现在要求证明：对于 $\mathscr{L}^+$ 中任何闭公式 A：

$\vdash_T A$，当且仅当，$I \models A$

证

我们采用数学归纳法，对公式 A 含的联结词和量词数进行归纳.

归纳基础：

A 是原子公式，如 $P_i^n(d_1, \cdots, d_n)$. $d_1, \cdots, d_n$ 是闭项，因此显然就有

如果 $\vdash_T A$，即 $\vdash_T \overline{P}_i^n(d_1, \cdots d_n)$，那么 $\overline{P}_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 在 I 中成立，即对 I 真，即 $I \models A$

类似地，也有

如果 $I \models A$，那么 $\vdash_T A$

归纳步骤：

令 A 为非原子公式，并且假设对联词和量词数小于 A 的每个公式，上述结果是成立的，从而去证明对 A 也成立上述结果. 这需要分三种情况.

情况 1：A 是 $(\neg B)$，此时，如果 $\vdash_T A$，即 $\vdash_T (\neg B)$，由于 T 的一致性，可知 B 一定不是 T 中定理. 考虑到 B 的联结词和量词数是比 A 小，应用归纳假设：当 B 不是 T 中定理时，B 对 I 不真. 由于 B 是闭公式，B 对 I 不真，就是 $\neg B$ 对 I 真，即 $\models \neg B)$，即 $I \models A$.

相反，如果 $I \models A$，即 $I \models (\neg B)$，所以 B

在 I 中不真，根据归纳假设设有 B 不是 T 的定理．再考虑到 T 的完全性，$(\neg B)$ 一定是 T 的定理，即有 $\vdash_T A$.

情况 2：A 是 $(B\to C)$

假设 A 对 I 不真，此时必有 B 对 I 真且 C 对 I 假，当然 B、C 的联词和量词数是小于 A 的，可以对 B、C 分别使用归纳假设，由 B 对 I 真可得 $\vdash_T B$，由 C 对 I 不真可得 C 不是 T 中定理，再考虑到 T 的完全性，$(\neg C)$ 就是 T 的定理，即有 $\vdash_T (\neg C)$，再利用重言式 $B\to((\neg C)\to\neg(B\to C))$，我们有

$$\vdash_T B\to((\neg C)\to\neg(B\to C))$$

注意 $\neg(B\to C)$ 就是 $\neg A$，连续进行 MP，相继得

$$\vdash_T ((\neg C)\to\neg(B\to C))$$

$$\vdash_T \to\neg(B\to C)$$

即

$$\vdash_T (\neg A)$$

由于 T 的一致性，A 不是 T 的定理．这样我们就从假设 A 对 I 不真推得 A 不是 T 的定理，下面所证的是，假设 A 不是 T 的定理可以推得 A 对 I 不真．

假设 A 不是 T 的定理，由 T 的完全性，有 $\vdash_T (\neg A)$，即 $\vdash_T \neg(B\to C)$，利用重言式 $(\neg(B\to$

$C)\to B)$，$(\neg(B\to C)\to\neg C)$ 可以得

$\vdash_T (\neg(B\to C)\to B)$

$\vdash_T (\neg(B\to C)\to C)$

通过 MP，我们有

$\vdash_T B$ 和 $\vdash_T (\neg C)$

由 T 的一致性知：

$\vdash_T B$ 和 $\vdash_T C$ 不成立（C 不是 T 的定理）

应用归纳假设于 B、C，就有 B 对 I 真，C 对 I 假，由定义知 $(B\to C)$ 对 I 假.

情况 3：A 是 $(\forall x_i)\ B\ (x_i)$

对此，还需区分 x_i 不在 B 中自由出现和 x_i 在 B 中自由出现两种可能加以证明.

首先说 x_i 不在 B 中自由出现，那么，B 一定也是闭公式，由于 B 的量词和联结词数小于 A，可以应用归纳假设，有

$\vdash_T B$，当且仅当，$I\models B$

对闭公式 B 当然有

$\vdash_T B$，当且仅当，$\vdash_T (\forall x_i)\ B$

$I\models B$，当且仅当，$I\models (\forall x_i)\ B$

所以就有

$\vdash_T (\forall x_i)\ B$，当且仅当，$I\models (\forall x_i)\ B$

即

$\vdash_T A$，当且仅当，$I\models A$

其次，如果 x_i 在 $B(x_i)$ 中自由出现，那么由于 $(\forall x_i) B(x_i)$ 是闭公式，$B(x_i)$ 中也仅有一个自由变元 x_i，所以 $B(x_i)$ 是只含一个自由变元的合式公式，当然它会出现在开始叙述引理时给出的只含一个自由变元的公式序列：

$F_0(x_{i0})$；$F_1(x_{i1})$. …

中，如 $B(x_i)$ 是 $F_m(x_{im})$，此时，A 就是 $(\forall x_{im}) F_m(x_{im})$

现在我们来证明从 $I|=A$，推得 $\underset{T}{\vdash} A$. 使用反证法，假设从 $I|=A$，推不出 $\underset{T}{\vdash} A$. 导致矛盾，从而得出，从 $I|=A$ 能推出 $\underset{T}{\vdash} A$.

$I|=A$，在我们的情况，就是 $I|=(\forall x_i) F_m(x_{im})$. 由于 K 的公理都是普遍有效式，也就是对每个解释皆真，当然 (K_4) 对 I 应该真，即：

$$I|=((\forall x_i) F_m(x_{im}) \to F_m(c_m))$$

显然有

$$I|=F_m(x_{im})$$

$F_m(c_m)$ 的联结词和量词数小于 A，所以应用归纳假设就有

$$\underset{T}{\vdash} F_m(c_m) \qquad (*)$$

考虑到应用反证法时，假设从 $I|=A$，推不出 $\underset{T}{\vdash} A$，由于 T 是完全的，就有 $\underset{T}{\vdash}(\neg A)$ 即

$$\underset{T}{\vdash} \neg(\forall x_{im}) F_m(x_{im})$$

考虑到 G_m 是 T 的公理，必有 $\vdash_T G_m$，即

$$\vdash_T (\neg (\forall x_{im}) F_m (x_{im}) \to \neg F_m (C_m))$$

因此，通过 MP 有

$$\vdash_T (\neg F_m (c_m))$$

它和公式（*）同时成立，显然与 T 是一致的相矛盾. 这样我们就要否定假设由 $\mathrm{I} \models A$ 推不出 $\vdash_T A$，从而得到：由 $\mathrm{I} \models A$ 推出 $\vdash_T A$.

反之，我们希望从 $\vdash_T A$ 推出 $\mathrm{I} \models A$，我们也用反证法，先假设 A 对 I 不真，然后导致矛盾，从而得出 A 在 I 中真.

令 $\vdash_T A$，且假设 A 在 I 中不真，即

$$\mathrm{I} \models (\forall x_{im}) F_m (x_{im})$$

不成立，这就是说存在 D_I 中的一个元素 d，使得：$\mathrm{I} \models (\neg F_m(d))$，下面对此作一说明，说 A 在 I 中不真，就是说在 I 中，存在不满足公式 $(\forall x_{im})F_m(x_{im})$ 的赋值，进一步也可以说 I 中必存在某个赋值 v；使得 v 不满足 $F_m(x_{im})$，由赋值定义知 $v(x_{im})$ 必为论域 D_I 中的元，即 $v(x_{im})$ 必为闭项，令其为 d，这样就有 $v(x_{im})=d$，这样的一个项 d 在 $F_m(x_{im})$ 中对 (x_{in}) 是自由的. 再考虑到解释 I 的构造，有 $v(d)=d$，因此，就有 $v(x_{im})=v(d)$，所有这些可以推得（不加证明）以下结论：

v 不满足 $F_m(x_{im})$，当且仅当，v 不满足

$F_m(d)$. 现在 v 是不满足 $F_m(x_{im})$，当然就有 v 不满足$F_m(d)$，这样，$F_m(d)$在 I 中不真，由 $F_m(d)$为闭公式知$\neg F_m(d)$在 I 中真，即 $I \models (\neg F_m(d))$.

但是由 $\vdash_T A$，即 $\vdash_T (\forall x_{im}) F_m(x_{im})$ 和 (K_5)

$$\vdash_T ((\forall x_{im}) F_m(x_{im}) \rightarrow F_m(d))$$

分离，可得：

$$\vdash_T F_m(d)$$

由于 $F_m(d)$ 的量词和联结词数小于 A，所以可以应用归纳假设，得到：

$$I \models F_m(d)$$

而 $F_m(d)$ 和$\neg F_m(d)$) 在 I 中同真是矛盾的，因此，应用反证法时，假设 A 对 I 不真不能成立，所以由 $\vdash_T A$ 可推得 $I \models A$，至此完成了数学归纳法的证明.

以上完成了引理的第二部分证明，留下的一部分证明就比较简单了.

至今，我们已经证明了一致的完全扩充T 中的所有定理在解释 I 中皆真，由于 T 是 S 通过放大语言和补加新公理所得，当然 S 中的定理都保留为 T 的定理. 所以我们也有 S 的所有定理在 I 中皆真. 当然 S 的定理都是 $\mathscr{L}$ 的合式公式，但 I 还含有并非 $\mathscr{L}$ 的合式公式的解释. 此时，我们只需通过排除个

体常元 b_0，b_1，…以及由它们组成的项的解释，对 I 作些限制，我们就得到了 $\mathscr{L}$ 的一个解释，并且使得 S 的每个定理在这个解释中皆真.

引理 2. 32 证毕，现在我们可以直接证明谓词演算的完备性定理了.

完备性定理 如果 A 是 $\mathscr{L}$ 中的普遍有效公式，那么，A 是系统 K 中的定理.

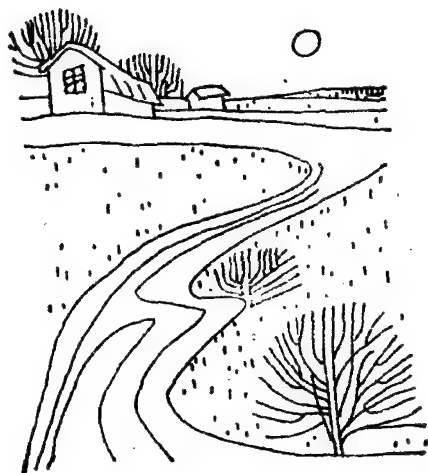
证

令 A 是 $\mathscr{L}$ 中任一普遍有效公式，对 A 中自由变元全部加全称量词约束后得的公式 A'，我们称它为 A 的全称闭公式，由关于解释的性质 3 知，A' 也是普遍有效公式.

现在我们希望在假设 A 普遍有效式时推得 A 是 K 的定理. 用反证法，假设当 A 为普遍有效式时，A 却不是 K 的定理，然后推出矛盾，从而否定假设，证明定理.

由于假设 A 不是 K 的定理，且 A 和 A' 在可推性上是等价的，故 A' 也不是 K 的定理. 此时，我们通过对 K 补加 $\neg A'$ 为新公理，可以得到 K 的扩充 K'，据引理 2. 29 知 K' 是一致的，再根据引理 2. 32，必存在 $\mathscr{L}$ 的一个解释，使得系统 K' 的每个定理在该解释中真. 特别地有：$\neg A'$ 在解释中也真，当然 A' 在解释中假（因为 A' 是闭公式），这和 A' 是普遍有效式矛盾. 可见 A 必然是 K 的定理. □

三　不完全性定理



哥德尔不完全性定理是说：在包含算术的一致的形式系统中，存在不可判定命题．

定理中所说的“不可判定命题”，是指命题本身和它的否定命题，在该系统中都不可证．如果我们用 $\mathscr{U}$ 表示这个不可判定命题，那么 $\mathscr{U}$ 和 $(\neg\mathscr{U})$ 就都不是系统中的可证公式．

定理中所说的“一致的”，就是我们前面说到过的含义，即无矛盾的或相容的．由于在一个不一致的或者矛盾的系统中，一切合式公式都可作为系统的定理推出，因此，对一个不一致的系统而言，不可能存在不可判定命题．想在一系统中确立不可判定命题，“一致的”条件是必要的．

定理中说到的“算术”，是指的关于自然数：0，1，2，……等的四则运算（加、减、乘、除）的理论，它有两种表述方式：一种是用日常语言（自然语言加上一些符号，如通常的数学语言）表述的，我们把它称为直观算术，可以用正楷大写拉丁字 N 表示．从小学开始就接触到它，它是非

完全形式化的，一般也不是公理化的．另一种是用形式语言表述的，有确定的初始符号，有严格的规则，是公理化、形式化的，我们用大写花体拉丁字母 $\mathscr{N}$ 表示，$\mathscr{N}$ 是一个形式系统．我们称它为一阶算术．

定理中还说到“包含”两字，这里可以是真包含，也可以等同．真包含时，一阶算术将是该形式系统的子系统；等同时，该系统就是一阶算术系统，此时定理可以成为：一阶算术中存在不可判定命题，或一阶算术是不完全的．我们的证明是针对一阶算术而作的，不过扩充到包含它为子系统的任何系统，定理也成立是显然的．

本书对本定理的证明，分三个步骤：

第一步：建立一阶算术系统 $\mathscr{N}$．

第二步：构造自指代命题 $\mathscr{U}$．

第三步：证明自指代命题 $\mathscr{U}$ 为不可判定命题．

关于第一步工作，可以不必是哥德尔不完全性定理的证明步骤，考虑到本书迄今尚未叙述过一阶理论、一阶算术理论，所以把建立一阶算术也作为准备提出．思路大体是这样的．几乎是重复从命题逻辑、谓词逻辑到命题演算、谓词演算的工作．在这里是将直观算术 N，通过形式化，建立起用形式语言表述的一阶算术 $\mathscr{N}$．特别要注意

两者的区别.

关于第二步：我们通过引进哥德尔码数、可表达性，实现两个转换，从而构造自指代命题$\mathscr{U}$.第一种转换：通过哥德尔编码，把关于一阶算术的断定转换为关于自然数的断定；第二种转换：通过可表达性，再把关于自然数的断定转换为关于一阶算术的断定. 实施两个转换后，可以获得一阶算术$\mathscr{N}$中的合式公式$\mathscr{U}$，它对系统$\mathscr{N}$自身作了断定，故称为自指代命题. 必须指出，实施第二种转换是有条件的，并非所有关于自然数的断定都可表达，只有具有递归性的函数、关系在$\mathscr{N}$中才是可表达的.

关于第三步：自指代命题$\mathscr{U}$是不可判定命题，可以在"一致的"条件下加以证明，但是证明十分复杂，在比"一致"更强的"ω——一致"的条件下证明第三步显得十分简洁，故哥德尔选择了后者. 本书也是先在ω——一致的条件下证明定理然后再补充说明如何推广.

根据以上分析可见：为证明本定理，需要一些在前的基本概念、基本理论，它们就是一阶算术、哥德尔 数、可表达性、递归性. ω——一致性等，现在对它们一一叙述如下.

1. 一阶算术

一阶算术是一种一阶理论.

所谓一阶理论，是对通常人们用日常语言所说的理论作公理化、形式化处理的结果，是用一阶语言表述的一个形式系统. 一阶理论也是一阶逻辑的一个扩充，除包括一阶逻辑的所有组成部分：初始符号、形成规则、初始公式和变形规则外，还要包括理论的特有公理. 一阶逻辑中的初始公式（即公理），又称逻辑公理，它刻划逻辑的特性. 特有公理是非逻辑公理，用来刻划理论的特性. 不同的理论有不同的特有公理，特有公理及其多寡是由理论本身决定的.

有各式各样的数学理论，如算术、代数、几何、分析，也有各式各样的一阶数学理论，如一阶算术、一阶群论、一阶集合论等. 它们由于理论的本性不同就有各种不同的特有公理组.此外，各种数学理论又几乎都包括等号. 因此，为方便起见，我们规定把刻划等号特有属性的相等公理固定下来，加入一阶逻辑的公理中. 这样，我们就得到带等号的一阶逻辑.

相等公理一般有三条.

$(E1)$：$P_1^2\ (x_1、x_1)$

$(E2)$：$P_1^2(t_k, u) \rightarrow P_1^2(f_i^n(t_1\cdots, t_k, \cdots, t_n), f_i^n(t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$，其中，$t_1$，…，$t_n$，$u$ 是任意的项，f_i^n 是任意的函数.

$(E3)$：$(P_1^2(t_k, u) \rightarrow P_i^n(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n) \rightarrow P_i^n(t_1, \cdots, u, \cdots, t_n)))$，其中，$t_1$，…，$t_n$，$u$ 是任意的项，P_i^n 是任意谓词.

公理中的 P_1^2 是第一个 2 元谓词，我们给它一个固定解释是相等. 例如：$P_1^2(x_1, x_2)$ 是说：两个个体变元 x_1、x_2 是相等的.

以后我们所研究的一阶算术，是建立在带等号的一阶逻辑基础上的形式理论. 从日常的算术发展到一阶算术，历史上经过两个阶段：第一阶段：从日常的算术到公理化算术；第二阶段：从公理化算术到一阶算术.

古代的算术是朴素直观的，并没有当作公理体系对待，经过众多数学家数千年的努力，直到 1889 年才由皮亚诺对它作了公理化的处理，把算术建立在五条算术公理的基础之上，五条算术公理是：

1. 0 是一个自然数.

2. 每个自然数 n，都有不同于 n 的后继 n'.（其中′ 表示后继运算.）

3. 不存在自然数 n，它的后继 n' 为 0.

4. 对于任意自然数 m 和 n，如果 $m'=n'$，

那么，$m=n$.

5. 对于任何含有 0 的自然数集 A，如果对任意的 $n \in A$，都有 $n' \in A$，那么 A 含有所有自然数.（这里的符号'$\in$'，表示在前的属于在后的，即 $n \in A$ 表示 n 属于 A）.

这样建立起来的公理化算术称为皮亚诺算术，用 N 表示. 尽管这样建立起来的皮亚诺算术公理系统，和朴素直观的算术相比，面貌已大有改观，但是由于它还是用日常语言叙述的，要想用它来严格、精确地证明哥德尔定理仍然不可能. 为此，尚需将它用一阶语言表述，建成完全形式化的一阶算术. 此时，所用的语言 $\mathscr{L}$，要有以下初始符号.

x_1、x_2、…	个体变元
a_1（表示 0）	个体常元
f_1^1、f_1^2、f_2^2(分别表示后继，和，积)	函数符号
P_1^2（表示等号）	谓词符号
$\neg$、$\rightarrow$、$\forall$	逻辑常项
(，)	括号

用大写花体拉丁字 $\mathscr{N}$ 表示一阶算术理论，它应是 K 的一个扩充，除补加相等公理（$E1$）、（$E2$）、（$E3$）外，还要补加刻画算术特点的特有公理. 这里列出七条，与皮亚诺公理还有点差别.

(N1) $(\forall x_1) \neg (f_1^1(x_1)=0)$.

(N2) $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_1^1(x_1)=f_1^1(x_2)\rightarrow x_1=x_2)$.

(N3) $(\forall x_1)(f_1^2(x_1、a_1)=x_1)$.

(N4) $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_1^2(x_1、f_1^1(x_2))=f_1^1(f_1^2(x_1、x_2)))$.

(N5) $(\forall x_1)(f_2^2(x_1、a_1)=a_1)$

(N6) $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_2^2(x_1、f_1^1(x_2))=f^2(f_2^2(x_1、x_2)、x_1))$

(N7) $\mathscr{A}(a_1)\rightarrow((\forall x_1)(\mathscr{A}(x_1)\rightarrow\mathscr{A}(f_1^1(x_1)))\rightarrow(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1))$ 对于 x_1 在其中自由出现的每个合式公式 $\mathscr{A}(x_1)$.

注意：为了在定理证明中，避免引起不必要的混淆，规定一阶算术 $\mathscr{N}$ 中的合式公式，用花体字 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$ 等表示.

七条公理中的（N1)、(N2）和（N7）相当于皮亚诺公理 1，4，5，当然仔细分析（N7）比公理 5 还要弱一点.（N3）—（N6）分别是加法和乘法的定义.

前面已经说过，本书关于不完全性定理的详细证明，是针对一阶算术所作的. 在证明中要实施两个转换，区别直观的算术 N 和形式化的一阶算术 $\mathscr{N}$，在证明定理时十分重要，故这里对它们使用的符号加以区分也是必要的.

$\mathscr{N}$ 是用上述一阶形式语言 $\mathscr{L}_N$ 叙述的一阶算术形式系统，N 是直观的算术，这里是指用日常语言叙述的，如皮亚诺算术. N 是 $\mathscr{N}$ 的模型、解释，$\mathscr{N}$ 是 N 的形式表达. 作为模型的 N 的论域（个体域）D_N 的成员是自然数，通常写成 0，1，2，…，n，…，它们在一阶算术中的严格的符号表示应为：

$$a_1$$

$$f_1^1\ (a_1)$$

$$f_1^1\ (f_1^1\ (a_1))$$

$$\vdots$$

$$\overbrace{f_1^1(\cdots f_1^1}^{n\text{次}}\ (a_1)\ \cdots)$$

$$\vdots$$

显然这样的书写太麻烦，所以我们在不引起混淆时规定用＋，×和′相应地去代替 f_1^2、f_2^2、f_1^1，此时自然数的形式表示为：$0, 0', 0'', \cdots, \overbrace{0''\cdots'}^{n}, \cdots$. 本书对它们还作一次简化，把它们写成：$0^{(0)}$，$0^{(1)}$，…，$0^{(n)}$，…. 上标（$n$）表示 n 次后继运算，不引起混淆时把 $0^{(0)}$ 写成 0).

t_1+t_2 代表 $f_1^2\ (t_1,\ t_2)$

$t_1\times t_2$ 代表 $f_2^2\ (t_1,\ t_2)$

t' 代表 $f_1^1\ (t)$

$(N1)$ — (N_7) 可以重写成：

$(N1^*)$ $(\forall x_1)\neg(x'_1=0)$

$(N2^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1'=x_2'\rightarrow x_1=x_2)$

$(N3^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2')=x_1)$

$(N4^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1+x_2'=(x_1+x_2)')$

$(N5^*)$ $(\forall x_1)(x_1\times 0=0)$

$(N6^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1\times x_2'=(x_1\times x_2)+x_1)$

$(N7^*)$ $\mathscr{A}(0)\rightarrow((\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)\rightarrow\mathscr{A}(x_1'))\rightarrow(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1))$，对每个 $\mathscr{N}$ 中的公式 $\mathscr{A}(x_1)$，其中 x_1 自由出现.

现在我们推证一些 $\mathscr{N}$ 中的定理.

引理 3.1 对于 $\mathscr{N}$ 中的任意项 t、s、r，下列公式是 $\mathscr{N}$ 中的定理：

$(N1')0\neq t'$

$((N2')t'=r'\rightarrow t=r$

$(N3')t+0=t$

$(N4')t+r'=(t+r)'$

$(N5')t\times 0=0$

$(N6')t\times r'=(t\times r)+t$

证明

它们分别由 $(N1^*)$　$(N6^*)$，通过全称概

括，然后再应用全称限定规则于适当的项 t，r，s 得到.

定理 3.2 对于任何项 t，r，s，下列公式为 $\mathscr{N}$ 中的定理.

(a) $t=t$

(b) $t=r\to r=t$

(c) $t=r\to (r=s\to t=s)$

(d) $r=t\to (s=t\to r=s)$

(e) $t=r\to t+s=r+s$

(f) $t=0+t$

(g) $t'+r=(t+r)'$

(h) $t+r=r+t$

(i) $t=r\to s+t=s+r$

(j) $(t+r)+s=t+(r+s)$

(k) $t=r\to t\times s=r\times s$

(l) $0\times t=0$

(m) $t'\times r=t\times r+r$

(n) $t\times r=r\times t$

(o) $t=r\to s\times t=s\times r$

证

(a)

1. $t+0=t$　　($N3'$)
2. $(t+0=t)\to (t+0=t\to t=t)$　　($E3$)
3. $t+0=t\to t=t$　　1，2，MP

4. $t=t$ 1，3，MP

(b)

1. $t=r\to(t=t\to r=t)$ ($E3$)
2. $t=t\to(t=r\to r=t)$ 1，$T5$
3. $t=r\to r=t$ 2，(a) MP

(c)

1. $r=t\to(r=s\to t=s)$ ($E3$)
2. $t=r\to r=t$ (b)
3. $t=r\to(r=s\to t=s)$ 1，2，$T3$

(d)

1. $r=t\to(t=s\to r=s)$ (c)
2. $t=s\to(r=t\to r=s)$ 1，$T5$
3. $s=t\to t=s$ (b)
4. $s=t\to(r=t\to r=s)$ 2，3，$T3$
5. $r=t\to(s=t\to r=s)$ 4，$T5$

(e)

应用归纳原理证明 $\mathscr{A}(z)$：$x=z\to(x+z=y+z)$

(i) 先证 $\vdash\mathscr{A}(o)$

1. $x+0=x$ ($N3'$)
2. $y+0=y$ ($N3'$)
3. $x=y$ (Hyp)（前提）
4. $x+o=y$ 1，3，(c)
5. $x+0=y+0$ 2，4，(d)

6. $x=y\rightarrow x+0=y+0$ 1—5，Ded（演绎定理）

(ii)

1. $x=y\rightarrow x+z=y+z$ (Hyp)
2. $x=y$ (Hyp)
3. $x+z'=(x+z)'$ $(N4')$
4. $y+z'=(y+z)'$ $(N4')$
5. $x+z=y+z$ 1，2，Mp
6. $(x+z)'=(y+z)'$ 4，$(E2)$
7. $x+z'=(y+z)'$ 3,6(c)
8. $x+z'=y+z'$ 4,7,(d)
9. $(x=y\rightarrow(x+z=y+z))\rightarrow(x=y\rightarrow(x+z'=y+z'))$ 1—8,Ded

由(i),(ii)应用归纳原理就有$\vdash(\forall z)\mathscr{A}(z)$.

因此，可得：$\vdash t=r\rightarrow t+s=r+s$.

(f) 令$\mathscr{A}(x)$为$x=0+x$，用归纳法证

由通过$(N3')$和(b)可得，$0=0+0$. 即$\vdash\mathscr{A}(0)$再有

1. $x=0+x$ (Hyp)
2. $(0+x')=(0+x)'$ $(N4')$
3. $x'=(0+x)'$ 1,$(E2)$
4. $x'=0+x'$ 2,3,(d)
5. $x=0+x\rightarrow x'=0+x'$ 1—4,Ded

综上得：$\vdash(\forall x)(x=0+x)$. 所以据全称限定就有$\vdash t=0+t$.

(g) $-\cdot(0)$ 证明从略.

定理 3.3 对于任何项 t，r，s，下列为可证公式.

(a) $t\times(r+s)=(t\times r)+(t\times s)$

(b) $(r+s)\times t=(r\times t)+(s\times t)$

(c) $(t\times r)\times s=t\times(r\times s)$

(d) $t+s=r+s\to t=r$

以上基本上都可通过归纳法证明，这里从略.

定理 3.4

(a) $\vdash t+0^{(1)}=t'$

(b) $\vdash t\times 0^{(1)}=t$

(c) $\vdash t\times 0^{(2)}=t+t$

(d) $\vdash t+s=0\to t=0\wedge s=0$

(e) $\vdash t\neq 0\to(s\times t=0\to s=0$

(f) $\vdash t+s=0^{(1)}\to(t=0\wedge s=0^{(1)})\vee(t=0^{(1)}\wedge s=0)$

(g) $\vdash t\times s=0^{(1)}\to(t=0^{(1)}\wedge s=0^{(1)})$

(h) $\vdash t\neq 0\to(\exists y)(t=y')$

(i) $\vdash s\neq 0\to(t\times s=r\times s\to t=r)$

(j) $\vdash t\neq 0\to(t\neq 0^{(1)}\to(\exists y)(t=y''))$

证

(a)

1. $t=0'=(t+0)'$ (N4′)

2. $t+0=t$ (N3′)

3. $(t+0)'=t'$ 2,(E2)

4. $t+0'=t'$ 1，3，3. 2 (c)

5. $t+0^{(1)}=t'$ 4,缩写

(b)

1. $t\times 0'=t\times 0+t$ (Nb′)

2. $t\times 0=0$ (N5′)

3. $(t\times 0)+t=0+t$ 2，3. 2 (e)

4. $t\times 0'=0+t$ 1,3,3. 2(c)

5. $0+t=t$ 3. 2(f),(b)

6. $t\times 0'=t$ 4,5,3. 2(c)

7. $t\times 0^{(1)}=t$ 6 缩写

(c) - (i) 的证明从略. 在讲述定理 3. 5 前，先引进几个定义：$t<s$，当 $(E\omega)(\omega\neq 0\wedge t+\omega=s)$

$t\leqslant s$，当 $t<s\vee t=s$.

$t>s$，当 $s<t$.

$t\geqslant s$，当 $s\leqslant t$

$t\nless s$，当 $\neg(t<s)$.

定理 3. 5 对于任意的项 t，r，s，下列为可证公式

(a) $t\nless t$

(b) $t<s\rightarrow(s<r\rightarrow t<r)$

(c) $t<s\rightarrow s\nless t$

(d) $t<s \leftrightarrow t+r<s+r$

(e) $t \leqslant t$

(f) $t \leqslant s \rightarrow (s \leqslant r \rightarrow t \leqslant r)$

(g) $t \leqslant s \leftrightarrow (t+r \leqslant s+r)$

(h) $t \leqslant s \rightarrow (s<r \rightarrow t<r)$

(i) $0 \leqslant t$

(j) $0<t'$

(k) $t<r \leftrightarrow t' \leqslant r$

(l) $t \leqslant r \leftrightarrow t<r'$

(m) $t<t'$

(n) $(0<0^{(1)})$, $(0^{(1)}<0^{(2)})$, $(0^{(2)}<0^{(3)})$ …

(o) $t \neq r \rightarrow (t<r \vee r<t)$

(o′) $t=r \vee t<r \vee r<t$

(p) $t \leqslant r \vee r \leqslant t$

(q) $t+r \leqslant t$

(r) $r \neq 0 \rightarrow t+r>t$

(s) $r \neq 0 \rightarrow t \times r \geqslant 0$

(t) $r \neq 0 \leftrightarrow r>0$

(u) $r>0 \rightarrow (t>0 \rightarrow r \times t>0)$

(v) $r \neq 0 \rightarrow (t>0^{(1)} \rightarrow t \times r>r)$

(w) $r \neq 0 \rightarrow (t<s \leftrightarrow t \times r<s \times r)$

(x) $r \neq 0 \rightarrow (t \leqslant s \leftrightarrow t \times r \leqslant r \times s)$

(y) $t \nless 0$

(z) $t \leqslant r \wedge r \leqslant t \rightarrow t=r$

证明从略.

定理 3.6 $\vdash y\neq 0\to(\exists_1 u)(\exists_1 v)(x=y\times u+v\wedge v<y)$

证

用归纳法证明，令上式为 $\mathscr{A}(x)$.

(i)

1. $y\neq 0$ $\quad Hyp$
2. $0=y\times 0+0$ $\quad (N3'),(N5')$
3. $0<y$ $\quad 1，3.5(t)$
4. $0=y\times 0+0\wedge 0<y$ $\quad 2，3，合取$
5. $(\forall u)(\exists v)(0=y\times u+v\wedge v<y)$ $\quad 4，E4$
6. $y\neq 0\to(\exists u)(\exists v)(0=y\times u+v\wedge v<y)$ $\quad 1-5，Ded$

(ii)

1. $\mathscr{A}(x)$，$y\neq 0\to(\exists u)(\exists v)(x=y\times u+v\wedge v<y)$ $\quad Hyp$
2. $y\neq 0$ $\quad Hyp$
3. $(\exists u)(\exists v)(x=y\times u+v\wedge v<y)$，1，2，$MP$
4. $x=y\times a+b\wedge b<y$ $\quad 3，C$（两次）
5. $b<y$ $\quad 4，T_{15}$
6. $b'\leqslant y$ $\quad 5，3.5(k)$
7. $b'<y\vee b'=y$ $\quad 6.Def$（定义）
8. $b'<y\to(x'=y\times a+b'\wedge b'<y)$ $\quad 4、(N4')$
9. $b'<y\to(\exists u)(\exists v)(x'=y\times u+v\wedge v<y)$

8, $E4$, Ded

10. $b'=y\to x'=y\times a+y\times 0^{(1)}$ 4,($N4'$),3.4(b)

11. $b'=y\to(x'=y\times(a+0^{(1)})+0\wedge 0<y)$

10, 3. 3, 2, 3. 5 (t), ($N3'$)

12. $b'=y\to(\exists u)(\exists v)(x'=y\times u+v\wedge v<y)$

11, Ded, $E4$.

13. $(\exists u)(\exists v)(x'=y\times u+v\wedge v<y)$

7, 9, 12, 重言

14. $\mathscr{A}(x)\to(y\neq 0\to(\exists u)(\exists v)(x'=y\times u+v$
$\wedge v<y)$ 1—13, Ded

即 $\mathscr{A}(x)\to\mathscr{A}(x')$

由(i),(ii),据归纳原理,就可得$\vdash(\forall x)\mathscr{A}(x)$. 这样,对于任意一个 x,和 $y\neq 0$,商数 u 和余数 v 的存在性已知证明了. 以下证明 u, v 的唯一性.

在 $y\neq 0$ 的条件下,假设有 u_1, v_1, u_2, v_2 都满足条件,然后证明两对数相等即可. 据假设有

$$x=y\times u_1+v_1\wedge v_1<y$$

$$x=y\times u_2+v_2\wedge v_2<y$$

现在,u_1 和 u_2 只可能有三种关系,$u_1=u_2$, $u_1<u_2$, $u_1>u_2$.

如果:$u_1=u_2$,根据 3. 3 (d) 有:$v_1=v_2$.

如果:$u_1<u_2$,那么可以有 $u_2=u_1+w$,($w\neq 0$). 因此,$y\times u_1+v_1=y\times(u_1+w)+v_2=y\times u_1$

$+y\times w+v_2$. 因此，$v_1=y\times w+v_2$；但是，$w\neq 0$. 因而有 $y\times w\geqslant y$，所以 $v_1=y\times w+v_2\geqslant y$，这与 $v_1<y$ 矛盾，因此，$u_1\nless u_2$.

类似地可证明 $u_2\nless u_1$. 因此有：$u_1=u_2$，和 $v_1=v_2$. 关于一阶算术的一些主要性质，我们先介绍到此，这完成了我们的第一步. 现在转入第二步，通过叙述哥德尔码数，可表达性、递归性，来构造自指代命题 $\mathscr{U}$.

至此，我们比较完整地建立了一阶形式算术 $\mathscr{N}$，完成了第一步，第二步要分别叙述哥德尔码数、可表达性、递归性.

2. 哥德尔数

哥德尔在证明不完全性定理时，创造性地引进了一种基本的技巧，就是对形式系统中的符号、公式、证明都以自然数进行编码. 这个做法目前已发展成为逻辑学和其他一些学科中的一种方法. 一般来说信息可以用英语、汉语等自然语言表述. 也可以用形式语言表述. 为了精确讨论、传递或处理信息，特别是有了电子计算机以后，把信息转换成数值形式大有好处，有时甚至可以说是本质的. 因为把信息转换成数值，在理论上和应用上都获得了创造性的成功. 这里，哥德尔应

用编码成功地证明了不完全性定理，就是理论上的创造性成果之一.

哥德尔方法不很复杂，他对一阶算术 $\mathscr{N}$ 编码，就是对 $\mathscr{N}$ 中的每个符号，合式公式，合式公式序列（如证明），都按确定的规则指派一个自然数. 这种自然数就是哥德尔码数、亦称哥德尔数. 由于指派只要求做到不同的符号，不同的公式，不同的公式串，必须对应不同的自然数，为此，指派的具体方法是可以多样的. 下面给出的是编码方法之一. 我们以下规定 $g(\forall)=13$，表示给一阶语言中的符号 $\forall$ 以哥德尔数 13，各个符号的哥德尔数规定如下：

$g(()=3$

$g())=5$

$g(,)=7$

$g(\neg)=9$

$g(\rightarrow)=11$

$g(\forall)=13$

$g(x_k)=7+8k \qquad k=1,2,\cdots$

$g(a_k)=9+8k \qquad k=1,2,\cdots$

$g(f_k^n)=11+8\times(2^n\times3^k) \qquad n=1,2,\cdots$

$k=1,2,\cdots$

$g(P_k^n)=13+8\times(2^n\times3^k) \qquad n=1,2,\cdots$

$k=1,2,\cdots$

这里，容易看到：所有符号都被指派了奇正整数的哥德尔数，并且不同的符号都被指派不同的奇正整数．也容易看到，只要任意给出的一个奇正整数对应某个符号的话，通过因子分解，总能很容易地写出那个符号．当然，在某种特殊的语言中（如一阶算术中），就并非所有一般的一阶语言中的符号都要用到，所以它们的哥德尔数也并不一定要用到．此外，还要指出的是，并非所有的奇正整数，都是某种形式语言中符号的哥德尔数．

例 3．7 求对应于奇正整数 65 的符号．

解

如果 65 是某个符号的哥德尔数的话，由于(，)，¬ ，→，∀ 的哥德尔数都比它小，所以 65 只能是 x_k，a_k，f_k^n，P_k^n 中之一．我们先用 8 去除它有

$$65=8\times8+1=8\times7+9=g(a_7)$$

所以，65 对应的符号是 a_7．

例 3．8 求对应于 299 的符号

解

$299=8\times36+11=11+8\times(2^2\times3^2)=(f_2^2)$ 所以，299 对应的符号是 f_2^2．

现在进一步对每个合式公式（即符合形成规则的符号串）指派哥德尔码数．令 u_1，u_2，…，u_k 是系统中的符号，用 $u_1u_2\cdots u_k$ 表示合式公式，我

们规定

$$g\ (u_1u_2\cdots u_k)=2^{g\ (u1)}\times 3^{g\ (u2)}\times\cdots\times P_{k-1}^{g\ (uk)}$$

其中 P_k 表示第 k 个奇素数，$P_0=2$. 容易看出与某个公式对应的哥德尔数是唯一的偶数. 并且也易看出，如果某个偶数是某公式的哥德尔数的话，只需对它进行因数分解就可以找到对应的公式，并且根据因数分解唯一性定理，对应的公式是唯一的.

例 3. 9 计算 $(P_1^2\ (x_1,\ x_2)\rightarrow P_1^1\ (x_1))$ 的哥德尔数.

解

$$g\ ((P_1^2(x_1,x_2)\rightarrow P_1^1(x_1)))$$

$$=2^{g\ (()}\times 3^{g\ (P1^2)}\times 5^{g\ (()}\times 7^{g\ (x1)}\times 11^{g\ (,)}\times 13^{g\ (x2)}\times 17^{g\ ())}\times 19^{g\ (\rightarrow)}\times 23^{g\ (p_1^1)}\times 29^{g\ (()}\times 31^{g\ (x1)}\times 37^{g\ ())}\times 41^{g\ ())}$$

$$=2^3\times 3^{109}\times 5^3\times 7^{15}\times 11^7\times 13^{23}\times 17^5\times 19^{11}\times 23^{61}\times 29^3\times 31^{15}\times 37^5\times 41^5.$$

例 3. 10 求对应于 $2^9\times 3^{61}\times 5^3\times 7^{15}\times 11^5$ 的合式公式.

解

$$2^9\times 3^{61}\times 5^3\times 7^{15}\times 11^5$$

$$=2^{g\ (\neg)}\times 3^{g\ (P1_1)}\times 5^{g\ (()}\times 7^{g\ (x1)}\times 11^{(()}$$

$$=g\ (\neg\ P_1^1(x_1))$$

所以，对应的公式为 $\neg\ P_1^1\ (x_1)$

注意:这里有一个区分哥德尔数对应的是符号、还是公式的方便的方法.符号的码数一定是奇数,而公式的码数中必然出现 2 的非零次幂,所以必为偶数. 因此,当某个自然数为哥德尔数时,如果它为奇数,就不能对应公式;如果它为偶数,就应该对应公式.

现在再进一步,对证明(公式的有限序列,或公式串)指派哥德尔数. 令 S_1, S_2, …, S_r 为公式序列,规定

$$g(s_1,s_2,\cdots,s_r)=2^{g(s1)}\times 3^{g(s2)}\times\cdots\times P_{r-1}^{g(sr)}$$

注意:显然,公式串的哥德尔数也是偶数,因为它也出现 2 的非零次幂,尽管公式和公式串的哥德尔数都是偶数,对它们区分也很方便,公式的哥德尔数的素数分解中只出现 2 的奇数次幂;公式串中却出现的是 2 的偶数次幂. 至此,我们已经清楚地看到了对形式系统的符号、公式、证明,如何进行哥德尔编码的方法. 哥德尔使用编码的目的,在于把关于作为形式系统的一阶算术 $\mathcal{N}$ 的对象的断定,转换为关于直观算术 N 中的自然数的断定. 也就是说,通过编码,使得形式系统中对象理论的好些属性都能在自然数中反映出来,尤其是有关对象理论的元定理也都可以表示为关于自然数的定理.

例如："公式序列 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…，$\mathscr{A}_n$，$\mathscr{A}$ 是公式 $\mathscr{A}$ 在一阶算术 $\mathscr{A}$ 中的一个证明，"是使用元语言对形式系统性质的一个断定，它是一个元命题，它断定了：公式的一个有限序列和一个特殊公式之间存在着一种关系．由于，通过哥德尔编码，可以知道：公式序列 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…$\mathscr{A}_n$，$\mathscr{A}$ 的哥德尔数为 m，特殊公式 $\mathscr{A}$ 的哥德尔数为 n．因此，可以将上述元命题转换为关于自然数（哥德尔数）m、n 之间的关系．当我们用元语言中符号 Pf 去表示时．它的定义应是：定义在 D_N 上的一个 2 元关系 Pf（m，n）成立，当且仅当，n 是 $\mathscr{N}$ 中某公式的哥德尔数，m 是该公式在 $\mathscr{N}$ 中的一个证明序列的哥德尔数．现在可以看到，通过哥德尔编码确实能把关于一阶算术的断定转换为关于自然数的断定．也就是说，把形式算术 $\mathscr{N}$ 中的断定转换为关于直观算术 N 中的断定．实现第一种转换．

3. 可表达性

可表达是一阶系统和它的解释、模型之间的一种关系．以前曾经说过：解释是由与形式语言中初始符号对应的元素集合的组，包括与个体变元对应的论域，与函数符号对应的定义在论域上

的函数集合，与谓词符号对应的定义在论域上的关系集合，与个体常元对应特指元素等. 实际上，解释是一个具有一定结构的集合，所以也有人把解释称为结构. 模型是一个满足某些条件的解释. 如一阶系统的定理在其中皆真的解释，就是该系统的模型. 与系统相比较，解释和模型都是对立物. 需要注意的是，当我们把解释的进程看成是从抽象的形式系统到直观的模型时，我们将要叙述的表达的进程，恰好相反，是从直观的模型到抽象的形式系统. 说得简洁一些，表达是解释的逆过程.

前面还说到过一阶算术 $\mathscr{N}$ 中的项 $0^{(n)}$，可以解释为自然数集合 N 的自然数 n；N 中的自然数 n 可用 $\mathscr{N}$ 中的项 $0^{(m)}$表达. $\mathscr{N}$ 中的有关谓词符号、函数符号可以解释为定义在 D_N（这里就是 N）上的关系和函数，现在要问反过来行吗？也就是说定义在 D_N，即定义在 N 上的关系、函数，是否都可用 $\mathscr{N}$ 中的公式加以表达？这就是所谓的“是否可表达”问题. 为此，我们需要介绍精确的“可表达性”一词的含义，并进而陈述可表达的条件. 现在我们通过实例来引进概念.

例 3.11 定义在自然数集合 D_N 上的相等关系 R，具有以下性质：对于任意的 m，$n \in D_N$，

（1）如果 $m=n$，那么 $\vdash_{N}$ $(0^{(m)}=0^{(n)})$

(2) 如果 $m \neq n$，那么 $\vdash_{\mathcal{N}} \neg \ (0^{(m)}=0^{(n)})$

证明

(1) 因为根据假设 $m=n$ 知道，m，n 在 $\mathcal{N}$ 中的对应项 $0^{(m)}$，$0^{(n)}$ 显然是同一个项. 因而 $0^{(m)}=0^{(n)}$ 是特有公理 (E1) 的代入实例，当然它应该是 $\mathcal{N}$ 中的定理，即有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}=0^{(n)})$$

(2) 因为当 $m \neq n$ 时，可以设 $m<n$（不失一般性），此时，必存在 $k>0$，使得 $n=m+k$. 据算术特有公理 ($N2^*$)，当 $m>0$ 时，有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}=0^{(m+k)} \rightarrow 0^{(m-1)}=0^{(m+k-1)}$$

…

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(1)}=0^{(k+1)} \rightarrow 0^{(0)}=0^{(k)})$$

应用三段论多次，就有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}=0^{(m+k)} \rightarrow 0^{(0)}=0^{(k)})$$

当 $m=0$ 时，上式显然成立.

根据 $k>0$，当时 $k-1 \in D_N$，并且有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\overbrace{0''\cdots'}^{k}=(\overbrace{0''\cdots'}^{k-1})')$$

即

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(k)}= \ (0^{(k-1)'}))$$

这样我们就有：

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}=0^{(m+k)} \rightarrow 0^{(0)}= \ (0^{(k-1)'}))$$

用假言易位重言式，就有

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg\ (0^{(0)} = (0^{(k-1)})') \to \neg\ (0^{(m)} = {}^{(m+k)})$$

而公理（$N1*$）给出

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg\ (0^{(0)} = (0^{(k-1)})')$$

上两式分离得

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg\ (0^{(m)} = 0^{(m+k)})$$

即

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg\ (0^{(m)} = 0^{(n)})$$

定义在自然数集的关系 R（即 $m=n$）具有性质（1），（2），我们称 R 在 $\mathcal{N}$ 中可由公式（$0^{(m)} = 0^{(n)}$表达.

例 3. 12 对于任意 m，$n \in D_N$，有

（1）$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+n)} = 0^{(m)} + 0^{(n)})$

（2）$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(mn)} = 0^{(m)} \times 0^{(n)})$

证明

（1）

我们在元语言中，对 n 进行归纳.

先设 $n=0$，显然，根据（$N3'$）有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+0)} = 0^{(m)} + 0)$$

现在设

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+n)} = 0^{(m)} + 0^{(n)})$$

要求证明

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+(n+1))} = 0^{(m)} + 0^{(n+1)})$$

由（$E2$）和（$N4'$）有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+n)})' = (0^{(m)} + 0^{(n)})'$$

$$\vdash_{\mathcal{N}} ((0^{(m)}+0^{(n)})'=0^{(m)}+(0^{(n)})')$$

三段论知

$$\vdash_{\mathcal{N}} ((0^{(m+n)})'=0^{(m)}+(0^{(n)})')$$

考虑到

$$0^{(m+(n+1))}=(0^{(m+n)})'$$

$$0^{(n+1)}=(0^{(n)})'$$

所以有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+(n+1))}=0^{(m)}+0^{(n+1)})$$

用类似方法可以证明（2），这里从略.

例 3. 13 D_N 上的小于关系<，具有如下性质：

（1）如果 $m<n$，那么 $\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}<0^{(n)})$.

（2）如果 $m\nless n$，那么 $\vdash_{\mathcal{N}} \neg (0^{(m)}<0^{(n)})$.

证

（1）

如果 $m<n$，不失一般性可设 $n=m+k$ $(k\neq 0)$，由下面定理知

$$\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)}=0^{(m+k)}$$

由上知

$$\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)}=0^{(m)}+0^{(k)}$$

由于 $k\neq 0$，显然 $0^{(k)}\neq 0$，所以有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(n)}=0^{(m)}+0^{(k)}) \land (0^{(k)}\neq 0)$$

通过存在概括有

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\exists x_1)(0^{(n)}=0^{(m)}+x_1 \land x_1\neq 0)$$

据定义，即

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)} < 0^{(n)})$

(2) 如果 $m \nless n$，有 $m > n$ 或 $m = n$.

当 $m > n$ 时，同上可证

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)} > 0^{(n)})$

当 $m = n$ 时，可得

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)} = ^{(n)})$

综上在 $m > n$ 或 $m = n$ 时，有

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)} > 0^{(n)}) \vee (0^{(m)} = 0^{(n)})$

根据定义，即

$\vdash_{\mathscr{N}} \neg (0^{(m)} \leqslant 0^{(n)})$

我们也说，定义在 D_N 上的小于关系，可用 $\mathscr{N}$ 中公式 $0^{(m)} < 0^{(n)}$ 表达. 现在引进在 $\mathscr{N}$ 中可表达的一般定义.

定义 3. 14 一个自然数域 D_N 上的 K 元关系 R 称为在 $\mathscr{N}$ 中是可表达的，如果在 $\mathscr{N}$ 中存在一个 K 个自由变元的合式公式 $\mathscr{A}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，使得对于任意自然数 $n_1, \cdots, n_k \in D_N$，都有：

(1) 如果 $R(n_1, \cdots, n_k)$ 在 N 中成立，那么

$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)})$

(2) 如果 $R(n_1, \cdots, n_k)$ 在 N 中不成立，那么

$\vdash_{\mathscr{N}} \neg \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)})$

由这个定义知道，相等关系和小于关系在 $\mathscr{N}$

中都是可表达的.

我们还可以看另外的例子. 自然数集合的子集可以看成是 1 元关系. 即如果 A 是 D_N 的一个子集，那么它可以看成是 1 元关系“$\in A$”. 当 A 为偶数集合时，N 上的关系“$\in A$”可用 $\mathscr{N}$ 中的公式：$(\exists x_2)(x_2 \times 0^{(2)} = x_1)$ 表达. 当然，此时，这个公式的一个解释就是“$\in A$”.

我们下面将叙述函数的可表达性. 所谓函数其实也是一种关系，是一种满足一定条件的关系. 一般情况下，一个 D_N 上的 $(k+1)$ 元关系 R，如果满足条件：对于任意 $n_1, \cdots, n_k \in D_N$，总恰有一个 $n_{k+1} \in D_N$，使得 $R(n_1, \cdots, n_k, n_{k+1})$ 成立，那么我们就把这个 $(k+1)$ 元关系 R 叫做一个 n 元函数. 这个条件其实就是函数值单值性条件，或称唯一性条件. 可见，当想用关系的可表达性概念来定义函数的可表达性时，需要考虑单值性条件.

定义 3. 15 一个定义在 D_N 上的 K 元函数称为在 $\mathscr{N}$ 中是可表达的，如果在 $\mathscr{N}$ 中（作为 $(k+1)$ 元关系）可由带 $k+1$ 个自由个体变元的公式 $\mathscr{A}$ 表达；并且使得对于任意的 $n_1, \cdots, n_k \in D_N$ 有

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1}) \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, x_{k+1})$$

符号“$\exists_1$”表示“存在唯一的”.

据此定义，我们可以验证一系列函数的可表达性.

例 3.16 在自然数集 D_N 上定义的下列函数是可表达的：

(1) $f(m, n) = m+n$

(2) $g(m) = 2m$

证明

当我们令 $\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3)$ 为公式 $x_3 = x_1 + x_2$ 时，(1) 的证明转化为证明以下三点：

(i) 如果 $p = m+n$，那么 $\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(p)} = 0^{(m)} + 0^{(n)}$

(ii) 如果 $p \neq m+n$，那么 $\vdash_{\mathscr{N}} \neg (0^{(p)} = 0^{(m)} + 0^{(n)})$

(iii) $\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_3)(x_3 = 0^{(m)} + 0^{(n)})$

即：

$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists x_3)(x_3 = 0^{(m)} + 0^{(n)} \wedge (\forall x_i)(x_i = 0^{(m)} + 0^{(n)} \rightarrow x_i = x_3)$

(i) 和 (ii) 是 3.11 和 $\vdash (0^{(m)} + 0^{(n)} = 0^{(m+n)})$ 的直接推论，现在只需证单值条件 (iii)，我们证明如下：因为

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m+n)} = 0^{(m)} + 0^{(n)})$

且有重言式

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m+n)} = 0^{(m)} + 0^{(n)}) \rightarrow (x_i) = 0^{(m)} + 0^{(n)} \rightarrow x_i = 0^{(m+n)}$

分离得

$$\vdash_{\mathscr{N}} (x_i = 0^{(m)} + 0^{(n)} \rightarrow x_i = 0^{(m+n)})$$

全称概括

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall x_i)(x_i = 0^{(m)} + 0^{(n)} \rightarrow x_i = 0^{(m+n)})$$

与上面公式合取得

$$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m+n)} = 0^{(m)} + 0^{(n)} \wedge (\forall x_i)(x_i = 0^{(m)} + 0^{(n)} \rightarrow x_i = 0^{(m+n)})$$

再用存在概括得：

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists x_3)(x_3 = 0^{(m)} + 0^{(n)} \wedge (\forall x_i)(x_i = 0^{(m)} + 0^{(n)} \rightarrow x_i = x_3)$$

即

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_3)(x_3 = 0^{(m)} + 0^{(n)})$$

我们令 $\mathscr{A}(x_1, x_2)$ 是公式 $x_2 = x_1 \times 0^{(2)}$ 时，(2) 的证明就转化为去证明：对每个 m，$n \in D_N$，都有

(i) 如果 $n = 2m$，那么 $\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(n)} = 0^{(m)} \times 0^{(2)}$

(ii) 如果 $n \neq 2m$，那么 $\vdash_{\mathscr{N}} \neg (0^{(n)} = 0^{(m)} \times 0^{(2)})$

(iii) $\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_2)(x_2 = 0^{(m)} \times 0^{(2)})$

对于 (i) 我们假设 $n = 2m$.

$$
\begin{aligned}
0^{(m)} \times 0^{(2)} &= 0^{(m)} \times 0'' && \text{缩写} \\
&= (0^{(m)} \times 0') + 0^{(m)} && (N6') \\
&= ((0^{(m)} \times 0) + 0^{(m)} + 0^{(m)} && (N6') \\
&= (0 + 0^{(m)}) + 0^{(m)} && (N5')
\end{aligned}
$$

$$=0^{(m)}+0^{(m)} \qquad (N3')$$

$$=0^{(m+m)} \qquad \text{前例}$$

$$=0^{(2m)}$$

$$=0^{(n)}$$

即 $\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)}\times 0^{(2)}=0^{(n)})$

对于（ii），假设 $n\neq 2m$ 时，就有

$\vdash_{\mathscr{N}} \neg\ (0^{(2m)}=0^{(n)})$

由于，

$\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(2m)}=0^{(m)}\times 0^{(2)}$

所以，由（$E2$）有

$\vdash_{\mathscr{N}} \neg\ (0^{(n)}=0^{(m)}\times 0^{(2)})$

对于（iii）的证明同上例，这里从略.

我们把 $Z(x)=0$，$S(x)=x+1$ 分别称为零函数和后继函数，它们现在都是 1 元函数，其实零函数可以推广为多元函数. 同时我们还把 $U_i^k(x_1, \cdots, x_k)=x_i$ 称为投影函数，U_i^k 的 k 个自变元为 $x_1, \cdots, x_k$，函数值为第 i 个自变元 x_i. 下面例题，分别证明零函数，后继函数，投射函数的可表达性.

例 3. 17 零函数 $Z(x)=0$ 是可表达的.

令 $\mathscr{A}(x_1, x_2)$ 为 $(x_1=x_1\wedge x_2=0)$，此时要求证明：

(i) 如果 $Z(m)=p$，那么

$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)}=0^{(m)}\wedge 0^{(p)}=0)$

(ii) 如果 $Z(m)\neq p$，那么

$$\vdash_{\mathscr{N}}\neg(0^{(m)}=0^{(m)}\wedge 0^{(p)}=0)$$

(iii) $\vdash_{\mathscr{N}}(\exists_1 x_2)(0^{(m)}=0^{(m)}\wedge x_2=0)$

证明

对于 (i)，如果 $Z(m)=p$，那么 $p=0$，此时：$0^{(m)}=0^{(m)}$和 $0^{(p)}=0$，显然都 $\mathscr{N}$ 中的定理，所以有

$$\vdash_{\mathscr{N}}(0^{(m)}=0^{(m)}\wedge 0^{(p)}=0)$$

对于 (ii)，如果 $Z(m)\neq P$，那么 $p\neq 0$，从而$\neg(0^{(p)}=0)$ 是 $\mathscr{N}$ 中的定理 ($N1'$)，此时有

$$\vdash_{\mathscr{N}}(0^{(m)}=0^{(m)}\wedge\neg(0^{(p)}=0))$$

可以推出

$$\vdash_{\mathscr{N}}\neg(0^{(m)}=0^{(m)}\wedge 0^{(p)}=0)$$

为了证明 (iii)，只需证明$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists 1x_2)(x_2=0)$，即只要证明$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists x_2)(x_2=0\wedge(\forall x_i)(x_i=0\rightarrow x_i=x_2)$. 因为下式成立：

$$\vdash_{\mathscr{N}}(0=0\wedge(\forall x_i)(x_i=0\rightarrow x_i=0))$$

通过存在概括可得

$$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists x_2)(x_2=0\wedge(\forall x_i)(x_i=0\rightarrow x_i=x_2))$$

例 3. 18 后继函数 $S(x)=x+1$ 是可表达的.

令 $\mathscr{A}(x_1,x_2)$为 $x_2=(x_1)'$，此时要求证明

(i) 如果 $S(m)=n$，那么

$\vdash_{\mathscr{N}}$ $(0^{(n)} = (0^{(m)})')$

(ii) 如果 $S(m) \neq n$，那么

$\vdash_{\mathscr{N}} \neg$ $(0^{(n)} = (0^{(m)})')$

(iii) $\vdash_{\mathscr{N}}$ $(\exists_1 x_2)(x_2 = (x_1)')$

证明

对于 (i)，如果 $S(m) = n$，$n = m+1$，所以有

$\vdash_{\mathscr{N}}$ $(0^{(n)} = 0^{(m+1)})$

即

$\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(m)} = (0^{(m)})'$

对于 (ii)，如果 $S(m) \neq n$，$n \neq m+1$，所以有

$\vdash_{\mathscr{N}}$ $(0^{(n)} = 0^{(m)})')$

对于 (iii)，可用上例的类似方法证明.

注意：在证明一个 k 元函数 f 可由带 $k+1$ 自由变元的公式 $\mathscr{A}$ 表达时，一般要证明三点：即对于任意的 $n_1, \cdots, n_{k+1} \in D_N$，有

(1) 若 $f(n_1, \cdots, n_k) = n_{k+1}$，有 $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(n_{k+1})})$

(2) 若 $f(n_1, \cdots, n_k) \neq n_{k+1}$，有 $\vdash_{\mathscr{N}} \neg \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(n_k+1)})$

(3) $(\exists_1 x_{k+1}) \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, x_{k+1})$

条件 (1)，(2) 表明 k 元函数 f，可以作为 $k+1$ 元关系由 $\mathscr{N}$ 中带 $k+1$ 个自由变元的公式 $\mathscr{A}$

(x_1, …, x_k, x_{k+1}) 表达. 条件 (3) 表明函数的单值性条件. 我们在证明某些函数的可表达性时，也是这样做的. 其实，不难证明由条件 (1)、(3) 可以一般地推得条件 (2). 于是，今后在证明函数的可表性时，只需证明条件 (1), (3) 成立即可.

至今，我们已经花了不少笔墨介绍可表达性概念，有些读者可能想到两个问题：(一) 定义在自然数集合上的函数、关系，在 $\mathscr{N}$ 中是否都可表达？(二) 可表达的条件是什么？

关于问题 (一)，比较容易回答. 因为一阶语言中的合式公式是可数的，而定义在 D_N 上的函数却有不可数个，所以当然有些函数是不可表达的. 同理有些关系也是不可表达的. 关于问题 (二)，我们可以给出一个结论：D_N 上的函数 (关系) 在 $\mathscr{N}$ 中可表达的条件是，该函数 (关系) 是递归的. 这需要花许多功夫才能说明白.

4. 递归函数和递归关系

递归一词来自拉丁文 recurse，原来意指往回跑、召回等. 我们现在把递归理解为借助于“回归”把未知的归结为已知的. 所谓递归函数是一

种数论函数，也就是说这种函数的定义域和值域都是自然数，并且对未知值的计算往往要回归到已知值才能求出．现在看一个古典的例子：

十三世纪斐波纳奇以商人的身份在东方旅游．在回转时，写了充满在旅行中搜集到的算术和代数材料的“算盘之书”（Liber Abaci 1202年）．其中有这样的问题：

如果每一对兔子每月生产一对新的兔子，而每一对新的兔子在第二个月也会生产，现在假设不发生兔子的死亡，问一年中由一对兔子能生出多少对来？

当不包括原来一对兔子时，第0，1，2，3，…月，出生的兔子对数分别是：

0，1，1，2，3，5，8，13，…这个数列延伸下去，就构成斐波纳奇数列．它可以用斐波纳奇函数作为通项．斐波纳奇函数是这样的：

$$F(0)=0$$

$$F(1)=1$$

$$F(n+2)=F(n)+F(n+1)$$

它表示开始时（第0月），没有新出生的兔子（0对兔子），第1月有一对新兔子，…，第$(n+2)$月的新兔子对的数目，是第n月与第$(n+1)$月新兔子对数目之和．例如，第6月的兔子对的数目8，

恰是第4月3对新兔子和第5月5对新兔子的和. 这里求第 $(n+2)$ 月的新兔子对数（实际上是函数值），需要回归到求第 n 月和第 $(n+1)$ 月的新兔子对数，即相对于 $n, n+1$ 的函数值. 可见斐波纳奇函数是早期的递归函数实例.

当然递归函数的现代研究，还是哥德尔在证明不完全性定理时开始的，它可用作可表达的充分条件. 近年来递归函数在计算机科学中有重要应用，获得了迅速的发展. 现在我们给出递归函数的定义. 定义步骤是：先给出一些作为基础的递归函数，称为基本函数，它们是零函数，后继函数，射影函数；然后给出一些构造生成新的递归函数的基本规则. 从基本函数出发，通过重复使用基本规则，生成所有递归函数.

定义 3. 19 基本函数为以下数论函数：

1. 零函数 Z：$Z(x)=0$，对所有 x.

2. 后继函数 S：$S(x)=x+1$，对所有 x.

3. 射影函数 U_i^k：$U_i^k(x_1, \cdots, x_k)=x_i$，对所有 $x_1, \cdots, x_k$.

定义 3. 20 基本规则为以下规则：

Ⅰ. 合成：如果 g 为有 j 个自变元的函数；且对每个 i $(1\leqslant i\leqslant j)$，$h_i$ 为 k 元函数，那么由

$f(x_1, \cdots, x_k) = g(h_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, h_j(x_1, \cdots, x_k))$

定义的 k 元函数 f，称为由 g 和 $h_1, \cdots, h_j$ 的合成.

Ⅱ. 递归：如果 g 是 k 元函数，h 是 $k+2$ 元函数，那么由

$f(x_1, \cdots, x_k, 0) = g(x_1, \cdots, x_k)$

$f(x_1, \cdots, x_k, y+1) = h(x_1, \cdots, x_k, y, f(x_1, \cdots, x_k, y))$

定义的 $k+1$ 元函数，叫做由 g 和 h 的递归. 注意当 $k=0$ 时，$x_1, \cdots, x_k$ 并不出现，此时上述可简化成

$f(0) = a$（一个固定的自然数）

$f(y+1) = h(y, f(y))$

Ⅲ. 最小数运算：令 $k+1$ 元函数 g 具有这样的性质：对于每个 $x_1, \cdots, x_k$，至少有一 y，使得 $g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$. 此时，由

$f(x_1, \cdots, x_n) =$ 满足条件：$(g(x_1, \cdots, x_k, y) = 0)$ 的诸 y 中的最小的一个.

定义的 k 元函数 f，称为由 g 通过最小数（或 μ）运算而得. 这里我们把能使条件 $g(x_1, \cdots, x_k, y) = 0$ 成立的最小数 y，记作 $\mu y(g(x_1, \cdots, x_k, y) = 0$

定义 3.21 一个数论函数是递归的，如果它

能由基本函数，通过有限次运用基本规则Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ而得.

一个数论函数是原始递归的，如果它能由基本函数，通过有限次运用基本规则Ⅰ，Ⅱ而得. 显然，由定义知原始递归函数必定是递归函数，反之不必然. 下面介绍一些常用的（原始）递归函数实例：

例 3. 22 和函数是原始递归的. 用 $f_1(x, y)=x+y$ 表示和函数，有

$$x+0=x$$

$$x+(y+1)=S(x+y)$$

即

$$f_1(x, 0)=U_1^1(x)$$

$$f_1(x, y+1)=S(f(x, y))$$

可见，f_1 可由射影函数 U_1^1 和后继函数 S 递归而得. 所以和函数是原始递归的.

例 3. 23 积函数是原始递归的. 用 $f_2(x, y)=x\times y$ 表示积函数，有

$$x\times 0=0$$

$$x\times(y+1)=(x\times y)+x$$

即

$$f_2(x, 0)=Z(x)$$

$$f_2(x, y+1)=f_1(f_2(x, y), x)$$

可见，f_2 可由零函数和原始递归函数 f_1 通过递

归而得，所以积函数是原始递归的.

例 3.24 常函数是原始递归的. 用 f 表示值为 k 的常函数，因为它可以写成：

$$f(0)=k,$$

$$f(y+1)=U_2^2(y,f(y))$$

可见，f 可由射影函数 U_2^2 通过递归而得，它是原始递归的.

例 3.25 用下列解析式定义的函数 sg，$\overline{sg}$ 是原始递归的.

$$sg(y)=\begin{cases}0,\text{如果 } y=0\\1,\text{如果 } y\neq 0\end{cases}$$

$$\overline{sg}(y)=\begin{cases}1,\text{如果 } y=0\\0,\text{如果 } y\neq 0\end{cases}$$

因为，它们可以分别写成：

$$sg(0)=0$$

$$sg(y+1)=1(\text{常函数})$$

和

$$\overline{sg}(0)=1$$

$$\overline{sg}(y+1)=0$$

即 sg，$\overline{sg}$ 可由零函数，常函数通过递归而得，所以都是原始递归的.

例 3.26 函数 $rm_2(y)$＝用 2 除 y 后的余项，它是原始递归的. 因为可以写成

$$rm_2(0)=0$$

$rm_2(y+1)=\overline{sg}(rm_2(y))$.

例 3.27 用以下解析式定义的函数 f（x，y）是递归的.

$$f(x,y)=\begin{cases}0,\text{当 } x+y \text{ 为偶数时}\\1,\text{当 } x+y \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

因为它可以写成

$$f(x,y)=rm_2(x+y)=rm_2(f_1(x,y))$$

而 f_1 和 rm_2 是原始递归的，所以 f 也是.

例 3.28 用以下解析式定义的函数 f 是原始递归的.

$$p(x)=\begin{cases}x-1,\text{当 } x>0\\0,\text{当 } x=0\end{cases}$$

因为可以写成：

$$p(0)=0$$

$$p(y+1)=y$$

所以 p 是原始递归的.

例 3.29 用以下解析式定义的函数是原始递归的.

$$x\dot{-}y=\begin{cases}x-y，\text{当 } x\geqslant y \text{ 时}\\0，\text{当 } x<y \text{ 时}\end{cases}$$

因为可以写成：

$$x\dot{-}0=x$$

$$x\dot{-}(y+1)=p(x\dot{-}y)$$

它相当于差函数，是原始递归的，纯粹的减函数

会引出负数，我们在这里不加讨论.

下面我们将讨论递归关系.关于可表达性，我们是先叙述关系的可表达性，然后再把它推广到函数的可表达性.这里关于递归性的叙述却相反，我们先叙述函数的递归性，然后再把它推广到关系的递归性. 其媒介是对关系引进特征函数.

定义 3.30 令 R 为定义在自然数集上的 k 元关系，R 的特征函数 C_R 定义如下：

$$C_R(x_1, \cdots, x_k) = \begin{cases} 0, & \text{当 } R(n_1, \cdots, n_k) \text{ 成立时} \\ 1, & \text{当 } R(n_1, \cdots, n_k) \text{ 不成立时} \end{cases}$$

定义 关系 R 是递归的，如果它的特征函数 C_R 是递归的.

以下关系是递归的：

例 3.31 令 R 为如下定义的 2 元关系 $R(x, y)$ 成立，当且仅当，$x+y$ 为偶数. 我们可以写出它的特征函数：

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x+y \text{ 为偶数时} \\ 1, & \text{当 } x+y \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

前面已经证明过函数 $f(x, y)$ 是递归的，由定义，$R(x, y)$ 是递归的.

例 3.32 2 元关系≤是递归的. 写出它的特征函数.

$$g(x,y)=\begin{cases}0, 当\ m\leqslant n\\ 1, 当\ m>n\end{cases}$$

可以改写成

$$g(x,y)=sg(x\dot{-}y)$$

显然是递归函数，所以 2 元关系≤是递归的.

前面说到过，集合也是一种关系，因而递归性概念也可以用于集合. 前面还说到过，自然数的子集 $A\subseteq D_N$，可以看成是 1 元关系 '$\in A$'. 因此，一个集合的特征函数，恰是相应的 1 元关系的特征函数. 所以我们可以规定，如果 '$\in A$' 的特征函数递归时，我们就称集合 A 为递归集.

例 3.33 以下集合是递归的.

(1) 集合 D_N 是递归的，因为它的特征函数

$$f(x)=0, 对任意\ x$$

是零函数.

(2) 空集 ϕ 是递归的，因为它的特征函数

$$f(x)=1, 对任意\ x$$

是常函数.

(3) 偶数集是递归的，因为它的特征函数

$$h(x)=\begin{cases}0, 当\ x\ 是偶数时\\ 1, 当\ x\ 是奇数时\end{cases}$$

(4) 单元子集是递归的

证

我们必须对每个自然数 k，证明由解析式

$$S_k(x)=\begin{cases}0, 当\ x=k \\ 1, 反之\end{cases}$$

给出的函数 S_k 是递归的. 现在通过对 k 进行归纳证明.

基础步骤：$k=0$ 时，有

$$S_0(x)=\begin{cases}0, 当\ x=0 \\ 1, 当\ x\neq 0\end{cases}$$

S_0 恰是 sg，所以是递归的.

归纳步骤：假设 $k>0$，且 S_{k-1}是递归的，此时

$$S_k(x)=\begin{cases}0, 当\ x=k \\ 1, 当\ x\neq k\end{cases}$$

综上，我们有

$$S_k(0)=1$$

$$S_k(x+1)=S_{k-1}(x), 对每个\ x$$

于是，S_k 是由 S_{k-1}通过递归而得，而由于假设 S_{k-1}是递归的，所以 S_k 也是递归的.

综上由归纳法知，对于每个自然数 k，S_k 是递归的.

(5) 每个自然数集的有限子集是递归的. 这个命题是 (4) 和下述定理的推论.

定理 3.34 如果 k 元关系 R,S 是递归的，那

么$\overline{R}$，$R\wedge S$，$R\vee S$ 等关系也是递归的.

我们先说明$\overline{R}$，$R\wedge S$，$R\vee S$ 等 k 元关系的意义，然后证明定理.

对一给定的 k 元组满足$\overline{R}$，当且仅当，该 k 元组不满足 R.

对一给定的 k 元组满足 $R\wedge S$，当且仅当，该 k 元组同时满足 R 和 S.

对一给定的 k 元组满足 $R\vee S$，当且仅当，该 k 元组满足 R，或满足 S.

证

因为$\overline{R}$的特征函数是$\overline{sg}$ (C_R)，即

$$C_{\overline{R}}(x_1,\cdots,x_k)=\overline{sg}\ (C_R(x_1,\cdots,x_k))$$

$$C_{R\wedge S}(x_1,\cdots,x_k)$$

$$=sg\ (C_R(x_1,\cdots,x_k)+C_S(x_1,\cdots,x_k))C_{R\vee S}$$

$$(x_1,\cdots,x_k)$$

$$=C_R(x_1,\cdots,x_k)\times C_S(x_1,\cdots,x_k)$$

由于 R，S 递归，所以 C_R，C_S 也递归，再加上sg ，$\overline{sg}$ 和＋，×是递归的，所以 $C_{\overline{R}}$，$C_{R\wedge S}$，$C_{R\vee S}$也是递归的.

由上很易推得，对于任意的递归集 A、B，它们的补、交、并都是递归的.

考虑到有限子集可以写成有限个单元集之并集，可见有限子集也是递归集.

递归理论目前已经发展得非常丰富，由于我

们在这里介绍它，主要是为了完成不完全性定理的证明. 故我们只介绍它们的一些基础知识，有了它们，我们已能证明可表达性定理. 可表达性定理是实现从直观到形式化这个第二种转换的重要内容.

5. 可表达性定理

可表达性定理 每个递归函数在 $\mathscr{N}$ 中都是可表达的.

由于递归函数是由基本函数通过基本运算生成的. 因此，本定理的证明也划分成两方面，首先证明基本函数是可表达的；其次证明基本运算保持可表达性，也就是说如果实施基本运算前的函数是可表达的，那么实施基本运算后的函数也是可表达的. 为叙述清晰起见，我们先建立以下引理.

引理 3.35 零函数 Z，后继函数 S 是可表达的.

证明见本章例 3.17 和例 3.18.

引理 3.36 射影函数 U_i^k 是可表达的.

证明

先证 $U_i^k(x_1,\cdots,x_k)=x_i$，可由公式

$x_1=x_1\wedge\cdots\wedge x_k=x_k\wedge x_{k+1}=x_i$

表达. 因为如果对于任意的 n_1, …, n_k, n_{k+1}, $\in D_N$, 有

$$U_i^k\ (n_1,\ \cdots,\ n_k)\ = n_{k+1},$$

那么, $n_{k+1} = n_i$, 此时 $0^{(n_k+1)} = 0^{(ni)}$

显然 $0^{(n1)} = 0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)} = 0^{(nk)}, 0^{(n_k+1)} = 0^{(ni)}$ 为可证公式, 因此有

$$\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(n1)} = 0^{(n1)} \wedge \cdots \wedge 0^{(nk)} = 0^{(nk)} \wedge 0^{(n_k+1)} = 0^{(ni)}$$

这样,我们就证明了函数可表达性的条件(1),即证明了 k 元射影函数,作为 $k+1$ 元关系是可表达的. 下面还要证明单值性条件 (3).

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1})\ (0^{(n1)} = 0^{(n1)} \wedge \cdots \wedge 0^{(nk)} = 0^{(nk)} \wedge x_{k+1} = 0^{(ni)})$$

这是显然的.

引理 3.37 合成运算保持可表达性.

证

令函数 f 由 g 和 h_1, …, h_j 合成:

$f(x_1, \cdots, x_k) = g\ (h_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, h_j(x_1, \cdots, x_k))$ g 为 j 元函数, $f, h_1, \cdots, h_j$ 为 k 元函数. 并且假设 $g\ (x_1, \cdots, x_j)$ 和 $h_1\ (x_1,\ \cdots,\ x_k)$, …, $h_j\ (x_1,\ \cdots,\ x_k)$ 分别可由 $\mathscr{N}$ 中的合式公式 $\mathscr{B}\ (x_1,\ \cdots,\ x_{j+1}$ 和 $\mathscr{A}_1\ (x_1,\ \cdots,\ x_{k+1})$, …, $\mathscr{A}_j\ (x_1,\ \cdots,\ x_{k+1})$ 表达. 现在要证 f 可由 $\mathscr{N}$ 中的公式 $\mathscr{A}\ (x_1,\ \cdots,\ x_{k+1})$ 表达. $\mathscr{A}$ 可以详细地写出为:

$(\exists y_1)\cdots(\exists y_j)(\mathscr{A}_1(x_1,\cdots,x_k,y_1)\wedge\cdots$
$\wedge\mathscr{A}_j(x_1,\cdots,x_k,y_j)\wedge\mathscr{B}(y_1,\cdots,y_j,$
$x_{k+1}))$

先证条件（1），令 $f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}$. 令 $h_i(n_1,\cdots,n_k)=r_i$，对 $1\leqslant i\leqslant j$；此时 $g(r_1,\cdots,r_j)=n_{k+1}$ 由我们的假设 g，h_1，$\cdots$，h_j 分别可由 $\mathscr{B}$，$\mathscr{A}_1$，$\cdots$，$\mathscr{A}_j$ 表达，所以我们有：

$$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{A}_i(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(ri)}),\ 1\leqslant i\leqslant j$$

$$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{B}(0^{(r1)},\cdots,0^{(rj)},0^{(nk+1)})$$

因此，我们可得合取式：

$$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{A}_1(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(r1)})\wedge\cdots$$
$$\wedge\mathscr{A}_j(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(rj)}\wedge\mathscr{B}(0^{(r1)},\cdots,$$
$$0^{(rj)},0^{(nk+1)})$$

通过存在概括规则，可得

$$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{A}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(nk+1)})$$

至此，条件（1）证明完毕. 现在证单值性条件(3)，即要证：

$$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists_1 x_{k+1})\mathscr{A}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$$

这个公式意指存在唯一的 x_{k+1}，使得 $\mathscr{A}$ 成立. 关于存在性，上面已经证明了，这里只需证明唯一性. 证明的思路是这样的，我们先假设 u，v 都能使 $\mathscr{A}$ 成立，然后证明它们相同，即 $u=v$. 先设 u，v 都使 $\mathscr{A}$ 成立，即有

$(*)(\exists_1 y_1)\cdots(\exists 1y_j)(\mathscr{A}_1(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},y_1)\wedge$

$\cdots \wedge \mathscr{A}_j(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, y_j) \wedge \mathscr{B}(y_1, \cdots,$

$y_j, u))$

和

$(**)(\exists y_1)\cdots(\exists y_j)(\mathscr{A}_1(x_1, \cdots, x_k, y_1) \wedge \cdots$

$\wedge \mathscr{A}_j(x_1, \cdots, x_k, y_j) \wedge \mathscr{B}(y_1, \cdots, y_j, v))$

对$(*)$使用 j 次存在限定规则，有：

$\mathscr{A}_1(x_1, \cdots, x_k, b_1) \wedge \cdots$

$\wedge \mathscr{A}_j(x_1, \cdots, x_k, b_j) \wedge \mathscr{B}(b_1, \cdots, b_j,$

$u)$对$(**)$使用 j 次存在限定规则，有：

$\mathscr{A}_1(x_1, \cdots, x_k, c_1) \wedge \cdots$

$\wedge \mathscr{A}_j(x_1, \cdots, x_k, c_j) \wedge \mathscr{B}(c_1, \cdots, c_j, v)$

由于 h_i 可由 $\mathscr{A}_i$ 可达，因此有

$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1})(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$

所以，从 $\mathscr{A}_1$ $(x_1, \cdots, x_k, b_i)$ 和 $\mathscr{A}_i$ $(x_1, \cdots,$ $x_k, c_i)$ 可推得 $b_i = c_i$，加之，从

$\mathscr{B}(b_1, \cdots, b_j, u)$

$b_1 = c_1, \cdots, b_j = c_j$

可得

$\mathscr{B}(c_1, \cdots, c_j, u)$

又从

$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1})\mathscr{B}(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$

有

$\mathscr{B}(c_1, \cdots, c_j, v)$

可得：

$u=v$

这样我们就可得

$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists_1 x_{n+1})\mathscr{A}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$

引理 3.38 令 $\beta(x_1, x_2, x_3) = rm(1+(x_3+1)+x_2, x_1)$. 那么 β 在 $\mathscr{N}$ 中可用公式 $Bt(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 表达. Bt:

$$(\exists w)(x_1=(1+(x_3+1)\times x_2)\times w+x_4 \wedge x_4 < 1+(x_3+1)\times x_2)$$

证明 本引理和引理 3.39 实际上是引理 3.40 的组成部分，为叙述方便，将它们分列于此.

上述 3 元函数 β 称为哥德尔 β 函数，很明显它是一个原始递归函数. 现在证明条件（1）、条件（3）成立. 条件（3）$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists_1 x_4)Bt(x_1), x_2, x_3, x_4)$ 是成立的，这由定理 3.6 保证. 故这里只需证明条件（1），即 β 函数作为 4 元关系是可表达的.

假设 $\beta(n_1, n_2, n_3)=n_4$. 根据 β 函数的定义，对某个 n 有：$n_1=(1+(n_3+1)n_2)n+n_4$，并且 $n_4<1+(n_3+1)n_2$. 所以有

$$\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(n1)}=(0^{(1)}+(0^{(n3)}+0^{(1)})\times 0^{(n2)})\times 0^{(n)}+0^{(n4)}$$

$$\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(n4)}<0^{(1)}+(0^{(n3)}+0^{(1)})\times 0^{(n2)}$$

因此，有合取式

$$\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(n1)}=(0^{(1)}+(0^{(n3)}+0^{(1)})\times 0^{(n2)})\times 0^{(n)}+$$

$$0^{(n4)} \wedge 0^{(n4)} < 0^{(1)} + (0^{(n3)} + 0^{(1)}) \times 0^{(n2)}$$

再用存在概括规则，就得

$$\vdash_{\mathscr{N}} Bt(0^{(n1)}, 0^{(n2)}, 0^{(n3)}, 0^{(n4)})$$

以上证明了 Bt 在 $\mathscr{N}$ 中表达了 β 函数.

引理 3.39 对于任意的自然数序列 n_0，n_1，…，n_k，存在着自然数 b，c 使得 $\beta(b, c, i) = n_i$，对 $0 \leqslant i \leqslant k$.

证

令 $j = \max(k, n_0, n_1, \cdots, n_k)$ $c = j!$. 考察数 $u_i = 1 + (i+1)c$，对 $0 \leqslant i \leqslant k$；它们两两不含有异于 1 的公因数. 因为，如果素数 p，既能整除 $1 + (i+1)c$，又能整除 $1 + (m+1)c$，$0 \leqslant i < m \leqslant k$，那么 p 将能整除它们的差 $(m-i)c$；此时，p 不能整除 c，因为否则的话 p 将能同时整除 $(i+1)c$ 和 $1 + (i+1)c$，因此 p 能整除 1，这是不可能的.

同时，p 也不能整除 $(m-i)$；因为 $m-i \leqslant k \leqslant j$，所以 $m-i$ 能整除 $j! = c$，因此，如果 p 整除 $m-i$，而 $m-i$ 能整除 c，当然 p 能整除 c 了，这是不行的. 至此，我们证明了不存在素数 p 能整除 $(m-i)c$，也就是说 u_i 是两两互素的，其中 $0 \leqslant i \leqslant k$.

此外，对 $0 \leqslant i \leqslant k$，$n_i \leqslant j \leqslant j! = c < 1 + (i+1)c = u_i$，即 $n_i < u_i$. 这样根据中国剩除定理，存

在一个数 $b<u_0u_1\cdots u_k$，使得

$$rm\ (u_i,\ b)\ =n_i \text{ 对 } 0\leqslant i\leqslant k$$

而

$$\beta(b,c,i)=rm(1+(i+1)c,b)$$
$$=rm\ (u_i,\ b)\ =n_i$$

引理获证. □

引理 3.38 和引理 3.39 使得我们能够在 $\mathscr{N}$ 中去表示有关自然数的有限序列. 这种能力在证明引理 3.40 时要用到，它在证明可表达性定理中起到了关键作用.

引理 3.40 递归运算保持可表达性.

证

令函数 $f(x_1,\cdots,x_k,y)$ 由 $g\ (x_1,\cdots,x_k)$ 和 $h(x_1,x_2,\cdots,x_k,y,z)$ 递归而得. 即：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} f(x_1,\cdots,x_k,0)=g\ (x_1,\cdots,x_k) \\ f(x_1,\cdots,x_k,y+1)=h(x_1,\cdots, \\ \quad x_k,y,f(x_1,\cdots,x_k,y)) \end{cases}$$

并且假设 $g\ (x_1,\cdots,x_k)$ 和 $h(x_1,\cdots,x_k,y,z)$，在 $\mathscr{N}$ 中分别可由公式 $\mathscr{A}(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 和 $\mathscr{B}(x_1,\cdots,x_{k+3})$ 表达. 现在 $f(x_1,\cdots,x_y,y)=z$，当且仅当，存在一个自然数的有限序列 $b_0,\cdots,b_y$，使得 $b_0=g\ (x_1,\cdots,x_k)$，$b_{w+1}=h(x_1,\cdots,x_k,w,b_w)$，对 $w+1\leqslant y$，且 $b_y=z$，据引理 3.39 参照这个自然数的有限序列，可以造一个 β 函数，再根据引理 3.38，

知道这个 β 函数在 $\mathscr{N}$ 中是可表达的. 下面我们将证明：$f(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 在 $\mathscr{N}$ 中可用公式 $\mathscr{C}(x_1,\cdots,x_{k+2})$表达.

$\mathscr{C}$ 为：

$(\exists u)(\exists v)[((\exists w)(Bt(u,v,0,w)\wedge \mathscr{A}(x_1,\cdots,x_k,w)))\wedge Bt(u,v,x_{k+1},x_{k+2})\wedge(\forall w)(w<x_{k+1}\rightarrow(\exists y)(\exists z)(Bt(u,v,w,y)\wedge Bt(u,v,w',z)\wedge\mathscr{B}(x_1,\cdots,x_k,w,y,z))]$

首先证明条件（1）成立，也就是说在 $f(n_1,\cdots,n_k,p)=m$ 的假设下，我们希望能证得

$$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{C}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(p)},0^{(m)})$$

下面通过对自然数 p 进行归纳，证明条件（1）成立，以下分别就 $p=0$ 和 $p>0$ 两种情况证明：

当 $p=0$ 时，此时 $m=g(n_1,\cdots,n_k)$ 考虑到序列只由一个 m 组成，据引理 3.39，存在 b，c，使得 $\beta(b,c,0)=m$，因此根据引理 3.38 有

（＊） $\vdash_{\mathscr{N}}Bt(0^{(b)},0^{(c)},0,0^{(m)})$

由于g 可由 $\mathscr{A}$ 表达：而 $m=g(n_1,\cdots,n_k)$，因此有

$$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{A}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(m)})$$

合取得

$$\vdash_{\mathscr{N}}Bt(0^{(b)},0^{(c)};0,0^{(m)})\wedge \mathscr{A}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(m)})$$

再应用存在概括规则，就有

$(**) \vdash_{\mathcal{N}} (\exists w)(Bt(0^{(b)}, 0^{(c)}, 0, w) \wedge \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, w))$

对 $\mathscr{C}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0, 0^{(m)})$ 的最后一个合取项$(***)$，由于 $w<0$，作为一个重言式它显然也是可证的，于是，我们通过对$(*)$、$(**)$、$(***)$等公式合取，然后再应用二次存在概括规则，就得到了

$$\vdash_{\mathcal{N}} \mathscr{C}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0, 0^{(m)})$$

当 $p>0$ 时，$f(n_1, \cdots, n_k, p)$ 的值，可以由（I）经过 $p+1$ 步计算后得出. 假设 $r_i = f(n_1, \cdots, n_k, i)$ 此时就有自然数的一个有限序列：

$$r_0, r_1, \cdots, r_p.$$

对此序列，据引理 3.39 存在自然数 b，c，使得

$$\beta(b, c, i) = r_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant p$$

再根据引理 4，它可由 Bt 表示，即有

$$\vdash_{\mathcal{N}} Bt(0^{(b)}, 0^{(c)}, 0^{(i)}, 0^{(ri)})$$

特别地，对于

$$\beta(b, c, 0) = r_0 = f(n_1, \cdots, n_k, 0) = g(n_1, \cdots, n_k)$$

有

(i) $\vdash_{\mathcal{N}} Bt(0^{(b)}, 0^{(c)}, 0, 0^{(r0)}) \wedge \mathscr{A}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(r0)})$

考虑到

$$r_p = f(n_1, \cdots, n_k, p) = m$$

$$\beta\ (b,\ c,\ p)\ = m$$

因此有

(ii) $\vdash_{\mathscr{N}} Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(p)},\ 0^{(m)})$

再看，对于 $0 \leqslant i \leqslant p-1$，有

$$\beta\ (b,\ c,\ i)\ = r_i = f\ (n_1,\ \cdots n_k,\ i)$$

$$\beta\ (b, c, i+1) = r_{i+1} = f(n_1, \cdots, n_k, i+1)$$

$$= h(n_1, \cdots, n_k, i, f(n_1, \cdots, n_k, i)$$

$$= h(n_1, \cdots, n_k, i, r_i)$$

因此，考虑到 β 可由 Bt 表达，h 可由 $\mathscr{B}$ 表达，就有

$$\vdash_{\mathscr{N}} Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(i)},\ 0^{(ri)})$$

$$\wedge_{\mathscr{N}} Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(i+1)},\ 0^{(ri+1)})$$

$$\wedge_{\mathscr{N}} \mathscr{B}\ (0^{(n1)},\ \cdots,\ 0^{(nk)},\ 0^{(i)},\ 0^{(ri)},\ 0^{(ri+1)})$$

合取得

$$\vdash_{\mathscr{N}} Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(i)},\ 0^{(ri)} \wedge$$

$$Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(i')},\ 0^{(ri')})\ \wedge$$

$$\mathscr{B}\ (0^{(ni)},\ \cdots,\ 0^{(nk)},\ 0^{(i)},\ 0^{(ri)},\ 0^{(ri+1)})$$

应用两次存在概括得

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists\ y)\ (\exists\ z)\ (Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(i)},\ y)\ \wedge$$

$$Bt\ (0^{(b)},\ 0^{(c)},\ 0^{(i')},\ z)\ \wedge$$

$$\mathscr{B}\ (0^{(n1)},\ \cdots,\ 0^{(nk)},\ 0^{(i)},\ y,\ z)$$

由于在个体域有限的情况下，全称式可以看作单

称式的合取，而这里考察的个体为 p，是有限的，因此，上面这些式，对 i 合取后，就得到全称式，所以有

(iii) $\vdash_{\mathcal{N}} (\forall w)(w<0^{(p)}\rightarrow(\exists y)(\exists z)(Bt(0^{(b)},$
$0^{(c)},w,y)\wedge Bt(0^{(b)},0^{(c)},w',z)\wedge$
$\mathscr{B}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},w,y,z)$

于是，再对(i)，(ii)，(iii)式合取，并两次应用存在概括规则，我们就能得到：

$$\vdash_{\mathcal{N}}\mathscr{C}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(p)},0^{(m)})$$

至此，我们已经完成了可表达性条件（1）的证明．下面证明单值性条件（3）．即求证：

$$\vdash_{\mathcal{N}}(\exists_1 x_{k+2})\mathscr{C}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(p)},x_{k+2})$$

证明是在元语言中，对 P 进行归纳而实现的．大家知道上式包括存在性和唯一性两方面，而存在性由于前面的证明，显然是成立的，故这里我们只需证明唯一性即可．对于归纳基础，即 $p=0$时，关于唯一性，只需参照下面的证明，可以较为容易地得到，这里从略，下面所作的属于归纳步骤，即在假设

$$\vdash_{\mathcal{N}}(\exists_1 x_{k+2})\mathscr{C}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(P)},x_{k+2})\text{之下，}$$

去证明

$$\vdash_{\mathcal{N}}(\exists_1 x_{k+2})\mathscr{C}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},0^{(p+1)},x_{k+2})$$

现在令：

$$a=g(n_1,\cdots,n_k)$$

$\gamma=f(n_1,\cdots,n_k,p)$

$\delta=f(n_1,\cdots,n_k,p+1)$

$=h(n_1,\cdots,n_k,p,\gamma)$

此时，由于g，h，f分别可由$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$表达，所以有

(1) $\vdash\mathscr{B}$ $(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p)}, 0^{(\gamma)}, 0^{(\delta)})$

(2) $\vdash\mathscr{A}$ $(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(a)})$

(3) $\vdash\mathscr{C}$ $(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p)}, 0^{(\gamma)})$

(4) $\vdash\mathscr{C}$ $(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p+1)}, 0^{(\delta)})$

(5) $\vdash$ $(\exists\ _1x_{k+2})$ $\mathscr{C}$ $(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p)}, x_{k+2})$

现在假设

(6) $\mathscr{C}$ $(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p+1)}, x_{k+2})$

我们的唯一性证明，就是去证：$x_{k+2}=0^{(\delta)}$. 对(6)通过存在限定规则可得

(a) $(\exists\ w)$ $(Bt\ (b, c, 0, w)\wedge\mathscr{A}\ (0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, w))$

(b) $Bt\ (b, c, 0^{(p+1)}, x_{k+2})$

(c) $(\forall\ w)$ $(w<0^{(p+1)})\rightarrow(\exists\ y)$ $(\exists\ z)$ $(Bt\ (b,$

$c, w, y)\wedge Bt\ (b, c, w', z)\wedge\mathscr{B}$

$(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, w, y, z))$

从(c)马上可得：

(d) $(\forall\ w)$ $(w<o^{(p)}\rightarrow$

$(\exists\ y)$ $(\exists\ z)$ $(Bt\ (b, c, w, y)\ \wedge$

$Bt(b, c, w' z) \wedge$

$\mathscr{B}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, w, y, z))$

从（c）通过存在概括有

(e) $Bt(b, c, 0^{(p)}, d) \wedge Bt(b, c, 0^{(p+1)}, e) \wedge$

$\mathscr{B}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p)}, d, e)$

从（a），（d），（e）可得

(f) $\mathscr{C}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p)}, d)$

从（f）和（3）、（5）可得

(g) $d=0^{(\gamma)}$

从（e），（g）可得：

(h) $\mathscr{B}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(p)}, 0^{(\gamma)}, e)$

再根据关于 $\mathscr{B}$ 的定理和（1）、有

(i) $0^{(\delta)}=e$

从（e）和（i）有

(j) $Bt(b, c, 0^{(p+1)}, 0^{(\delta)})$

再从（b），（j）定理3.38就得到

(k) $x_{k+2}=0^{(\delta)}$

这样就完成了唯一性条件（3）的证明．引理3.40获证．

引理3.41 最小数运算保持可表达性．

证

让我们假设，对于任意的 $x_1, \cdots, x_k$，存在某个 y，使得 $g(x_1, \cdots, x_k, y)=0$，并且设 g 在 $\mathscr{N}$ 中可由公式 $\mathscr{D}(x_1, \cdots, x_{k+2})$ 表达，再令 f（x_1，

$\cdots, x_k) = \mu y(g(x_1, \cdots, x_k, y) = 0)$. 那么，$f$ 在 $\mathscr{N}$ 中可由公式 $\mathscr{C}(x_1, \cdots, x_{k+1})$ 表达，$\mathscr{C}$ 为：

$$\mathscr{D}(x_1, \cdots, x_{k+1}, 0) \wedge (\forall y)(y < x_{k+1} \rightarrow \neg \mathscr{D}(x_1, \cdots, x_k, y, 0))$$

现在，我们分别证明满足可表达条件（1）和条件（3）.

关于条件（1）. 先假设 $f(n_1, \cdots, n_k) = m$. 此时有：

$$g(n_1, \cdots, n_k, m) = 0$$

且当 $n < m$ 时，有

$$g(n_1, \cdots, n_k, n) \neq 0$$

因为g 由 $\mathscr{D}$ 表达，所以有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{D}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(m)}, 0)$$

考虑到有限个体域时，全称式和合取式可以互相转换，所以当 $n < m$ 时有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \neg \mathscr{D}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(n)}, 0)$$

即

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall y)(y < 0^{(m)}) \rightarrow \neg \mathscr{D}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, y, 0)$$

合取后就得

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{C}(0^{(n1)}, \cdots, 0^{(nk)}, 0^{(m)})$$

关于条件（3），即要求证明 $\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1}) \mathscr{C}(0^{(n1)} \cdots, \cdots, 0^{(nk)}, x_{k+1})$. 其实此公式是一合取式，这一合取项的存在性，前面已经证过；另一

合取项反映唯一性，需要现在加以证明．证明的思路是这样的：开始我们假设 u、v 都满足条件，然后证明 $u=v$.

由于假设 u，v 都满足条件，即有

$$\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},u,0)\land(\forall y)(y<u\to\neg\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},y,0)$$

$$\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},v,0)\land(\forall y)(y<v\to\neg\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},y,0)$$

因而，在 $v<u$ 的条件下可以推得

$$\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},v,0)$$

$$\neg\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},v,0)$$

即得矛盾：

$$\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},u.\ 0)\land$$
$$\neg\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},v,0)$$

在 $u<v$ 的条件下，类似地可推得矛盾：

$$\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},u,0)\land$$
$$\neg\mathscr{D}(0^{(n1)},\cdots,0^{(nk)},u,0)$$

而 u，v 之间只可能

$$\vdash(u=v)\lor(u<v)\lor(v<u)$$

后两者都导致矛盾，所以有

$$u=v$$

唯一性证毕．引理3.41证完．□

至今，我们可以综合一下，引理3.35和引理3.36保证了基本函数在 $\mathscr{N}$ 中可表达．引理3.37、

引理3.40和引理3.41保证了基本运算保持可表达性. 而递归函数都可由基本函数通过有限次使用基本运算而得到，因此递归函数在 $\mathcal{N}$ 中都是可表达的. 这样我们就证明了可表达性定理.

此外，考虑到定义在自然数上的 k 元递归关系 $R(x_1, \cdots, x_k)$ 的特征函数 $C_R(x_1, \cdots, x_k)$ 是递归函数，所以它在 $\mathcal{N}$ 中据可表达性定理，可由 $\mathcal{N}$ 中的公式 $\mathcal{B}(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 加以表达，显然此时，$R(x_1, \cdots, x_k)$ 在 $\mathcal{N}$ 中可由公式 $\mathcal{B}(x_1, \cdots, x_k, 0)$ 表达，这样我们就得到了一个推论.

每个递归关系在 $\mathcal{N}$ 中都是可表达的.

至此，我们已经讲述了哥德尔数和可表达性. 大家可以看到，通过哥德尔码数，确实能把关于一阶算术的断定转换为关于自然数的断定；由递归性作条件，确实能把关于自然数的断定再转换为关于一阶算术的断定，以下将构造自指代命题 $\mathcal{U}$，并证明它是不可判定命题.

6. 不完全性定理的证明

在构造不可判定命题前，我们还需介绍几个递归关系和 ω-一致性概念，当然这些递归关系在 $\mathcal{N}$ 中是可表达的.

在讲述哥德尔数时，已经说过，$\mathscr{N}$ 中的每个合式公式有一个哥德尔数，$\mathscr{N}$ 中的证明，作为一个合式公式序列也有一个哥德尔数，现在假设 $\mathscr{A}$ 的一证明序列：

$$\mathscr{A}_1,\ \cdots,\ \mathscr{A}_n,\ \mathscr{A}$$

的哥德尔数为 m；公式 $\mathscr{A}$ 的哥德数为 n，此时我们就说自然数 m，n 满足关系 pf. 严格地说，定义在自然数集 D_N 上的2元关系 pf（m，n）成立，当且仅当，n 是 $\mathscr{N}$ 中某个公式的哥德尔数，m 是该公式的一个证明序列的哥德尔数. 为证明不完全性定理，我们下面列出8个递归关系：

（1）Wf：Wf（n）成立，当且仅当，n 是 $\mathscr{N}$ 中的某个公式的哥德尔数.

（2）Lax：Lax（n）成立，当且仅当，n 是 $\mathscr{N}$ 的某条逻辑公理的哥德尔数.

（3）$Prax$：$Prax$（n）成立，当且仅当，n 是 $\mathscr{N}$ 的某条非逻辑公理的哥德尔数.

（4）Prf：Prf（n）成立，当且仅当，n 是 $\mathscr{N}$ 的某个证明的哥德尔数.

（5）Pf：Pf（m，n）成立，当且仅当，n 为 $\mathscr{N}$ 的某个公式的哥德尔数，m 为该公式的某个证明序列的哥德尔数.

（6）$Subst$：$Subst$（m，n，p，q）成立，当且仅当，对哥德尔数为 n 的公式中，用哥德尔数为

p 的项代入哥德尔数为 q 的变元的所有自由出现后，所得的公式的哥德尔数为 m.

(7) W：W (m, n) 成立，当且仅当，m 是 $\mathscr{N}$ 的一个公式 $\mathscr{A}$ (x_1) 的哥德尔数，其中 x_1 自由出现，n 是 $\mathscr{A}$ $(0^{(m)})$ 在 $\mathscr{N}$ 中的一个证明序列的哥德尔数.

(8) D：D (m, n) 成立，当且仅当，m 是 $\mathscr{N}$ 的一个公式 $\mathscr{A}$ (x_1) 的哥德尔数，其中 x_1 自由出现，n 是公式 $\mathscr{A}$ $(0^{(m)})$ 的哥德尔数.

这些都是定义在自然数集上的关系，前面4个为1元关系，后面4个为多元关系. 它们的递归性质的证明，尽管不算太困难，但是却要花费大量的笔墨，本书限于篇幅起见，只能从略了.

定义 一阶系统是 ω-一致的，如果在系统中不存在任何公式 $\mathscr{A}$ (x_1)，其中 x_1 自由出现，使得$\neg$ $(\forall x_1)$ $\mathscr{A}$ (x_1) 是系统的定理，而且对每个 $n \in D_N$，总有 $\mathscr{A}$ $(0^{(n)})$ 是系统的定理.

由于在 $\mathscr{N}$ 的非标准模型中，除含有数项0，$0^{(1)}$，$0^{(2)}$，…的解释0、1、2、…等自然数之外，还可以含有其他元素，因此，断言：对每个 $n \in D_N$，$\mathscr{A}$ $(0^{(n)})$ 是定理，比断言 $(\forall x_1)$ $\mathscr{A}$ (x_1) 是定理要弱一点. ω-一致性断言：对于每一个 $n \in D_n$ $\mathscr{A}$ $(0^{(n)})$ 是定理时，并不顾及 $(\forall x_1)$ $\mathscr{A}$ (x_1) 是否为定理，只要求$\neg$ $(\forall x_1)$ $\mathscr{A}$ (x_1) 不

能是定理．所以，ω-一致性是比一致性更强的条件．系统是 ω-一致性的系统必定是一致的，反之并不必然．

现在构造自指代命题 $\mathscr{U}$．

首先，定义自然数集 D_N 上的一个2元关系 W（m，n），W（m，n）成立，当且仅当，$\mathscr{N}$ 中的某一合式公式 $\mathscr{A}$（x_1）（其中 x_1 自由出现）的哥德尔数为 m，$\mathscr{A}$（$0^{(m)}$）在 $\mathscr{N}$ 中的一个证明的哥德尔数为 n．这个2元关系在哥德尔不完全性定理的证明中，是至关重要的，一定要搞清它的意义．特别是：与 m 相应的公式 $\mathscr{A}$（x_1）中的 x_1，是 $\mathscr{N}$ 中的个体变元，而 $\mathscr{A}$（$0^{(m)}$）中的 $0^{(m)}$ 却是 $\mathscr{N}$ 中的个体常元，它在模型中的解释是 m，其实这个2元关系就是上面说到过的递归关系（7），即然它是递归关系，当然在 $\mathscr{N}$ 中应该可表达，也就是说，在 $\mathscr{N}$ 中一定存在一个带2个自由变元的合式公式 $\mathscr{W}$（x_1，x_2），且对任意自然数 m，n，有

如果 W（m，n）成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{W}(0^{(m)}, 0^{(n)})$

如果 $W(m,n)$ 不成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}} \quad \mathscr{W}(0^{(m)},0^{(n)})$

我们再说一遍，以上所述是指 W（m，n）在 $\mathscr{N}$ 中可用 $\mathscr{W}$（x_1，x_2）表达，而 $\mathscr{W}$（x_1，x_2）在模型 N 中的解释是 W（m，n）．

其次，用公式 $\mathscr{W}$（x_1，x_2）来构造命题 $\mathscr{U}$，先构造公式 $\mathscr{A}$（x_1），x_1在其中自由出现，它的具

体形式是：

$$(\forall x_2) \neg \mathscr{W}(x_1, x_2)$$

其中 x_2 是约束的，只有 x_1 是自由的．现在假设 $\mathscr{A}(x_1)$ 的哥德尔数为 p，它在 $\mathscr{N}$ 中的相应的数项是 $0^{(p)}$，当用 $0^{(p)}$ 代入自由变元 x_1 后，可以得到公式

$$\mathscr{A}(0^{(p)}): (\forall x_2) \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$$

我们把它简记为 $\mathscr{U}$，这就是我们所要建造的自指代命题，下面我们要证明 $\mathscr{U}$ 是不可判定命题，即 $\mathscr{U}$ 和 $\neg \mathscr{U}$ 都不是 $\mathscr{N}$ 中的定理．证明之前我们来说明一下为什么称 $\mathscr{U}$ 为自指代命题．对

$$\mathscr{U}: (\forall x_2) \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$$

大体可以这样解释：

“对于每个自然数 n，$W(p, n)$ 都不成立．”

说得详细一点，是指：

“当 p 是某个公式 $\mathscr{A}(x_1)$（x_1 自由出现）的哥德尔数时，对于每个自然数 n，使得 n 是公式 $\mathscr{A}(0^{(p)})$ 在 $\mathscr{N}$ 中的一个证明的哥德尔数，总是不可能的．”

综上可知，$\mathscr{U}$ 的解释是：

“对于每个自然数 n，n 总不是公式 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{N}$ 中任一个证明的哥德尔数．”

于是，$\mathscr{U}$ 就自己断定了自己在 $\mathscr{N}$ 中的证明的不可能存在，即 $\mathscr{U}$ 断言了自身的不可证．

最后，证明不完全性定理本身.

不完全性定理 在 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的假设下，公式 $\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理，它的否定 $\neg\mathscr{U}$ 也不是定理. 简言之，若 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的，则 $\mathscr{N}$ 是不完全的.

证

先说明一下为什么要假设系统 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的. 因为 $\mathscr{N}$ 的 ω-一致可以推得 $\mathscr{N}$ 的一致性. 如果系统 $\mathscr{N}$ 不一致，那么，系统中的任何公式都是定理，当然公式 $\mathscr{U}$，$\neg\mathscr{U}$ 也是定理，这样一来，系统 $\mathscr{N}$ 就完全了. 可见要证明 $\mathscr{N}$ 是不完全的话，$\mathscr{N}$ 是一致系统的假设是必要的. 现在为方便起见，我们用了一个比一致性更强一点的假设 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的.

现在用反证法证明 $\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理.

设 $\mathscr{U}$ 是一阶系统 $\mathscr{N}$ 的一条定理，即 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{N}$ 中一个可证公式，那么在 $\mathscr{N}$ 中就存在 $\mathscr{U}$ 的一个证明序列，令 q 是这个证明序列的哥德尔数；再令 p 是 $\mathscr{A}(x_1)$：$(\forall x_2)\neg\mathscr{W}(x_1, x_2)$ 的哥德尔数，此时根据定义 $W(p, q)$ 成立，由于 W 是递归关系，在 $\mathscr{N}$ 中由 $\mathscr{W}$ 表达，因此有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$$

另一方面，据假设 $\mathscr{U}$ 是定理，即

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall x_2)\neg\mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$$

应用（$K5$）有：

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall x_2) \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2) \rightarrow \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$$

上两式分离就有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$$

与 $\mathscr{N}$ 的一致性矛盾，所以 $\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理.

以下证明$\neg \mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理.

由于 $\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的一条定理，就是说不存在 $\mathscr{U}_0$ 在 $\mathscr{N}$ 中的证明，从而也可以说，对任意自然数 q 来说，它都不是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{N}$ 中任一个证明的哥德尔数，即（$\forall x_2$）$\neg \mathscr{W}$（$0^{(p)}$，x_2）在 $\mathscr{N}$ 中不可证，因此，$W(p, q)$ 对任意数 q 都不成立. 所以据可表达性定义. 有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)}),\ \text{对每个}\ q \in D_N$$

于是根据 ω-一致性定义，

$$(\forall x_2) \neg \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$$

不是 $\mathscr{N}$ 中的定理，即$\neg \mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 中的定理. 至此，我们完成了哥德尔第一定理的证明.

注意：在定理证明的第一部分中，我们只用到 $\mathscr{N}$ 是一致的条件，只是在定理证明的第二部分中，才用到 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的条件. 其实 ω-一致性条件在证明的第二部分中，也可以减弱到只需一致性即可. 这已由罗塞尔（J·B·Rosser）给出了证明，思路与哥德尔的证明是一样的，不过技术

细节要麻烦一些．现在我们来证明第二定理：

第二定理 如果 $\mathscr{N}$ 是一致的，那么 $\mathscr{N}$ 的一致性证明不能在系统 $\mathscr{N}$ 中形式化.

证

详细的证明需要很大的篇幅，这里作概略的叙述.

利用第一定理证明的第一部分，我们得到的结果是，如果系统 $\mathscr{N}$ 是一致的，那么 $\mathscr{U}$ 是不可证明的．通过对这个元理论层次的形式化，考虑到“$\mathscr{U}$ 是不可证明的”的形式表达式是 $\mathscr{U}$，所以有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathrm{cons}\mathscr{N} \rightarrow \mathscr{U}$$

其中 cons$\mathscr{N}$ 是“$\mathscr{N}$ 是一致的”一个纯形式的表达．此时，如果我们假设能够在 $\mathscr{N}$ 系统中形式地证明它的一致性，即就有

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathrm{cons}\mathscr{N}$$

通过应用分离规则，就得到

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{U}$$

这和第一定理证明的第一部分所取得的结果矛盾．所以要放弃假设，也就是说，一致性的纯形式地证明是不存在的，有兴趣的读者可以参阅 S. C. 克林著，莫绍揆译的《元数学导论》§42（科学出版社1985年版）.

关于不完全定理，还想作几点说明：

第一，不完全性定理的较为直观的含义是，在一阶算术中存在着真的但在系统内不可证明的闭公式. 用这种说法表示 $\mathscr{N}$ 的推理功能不完全，当然是比较直观的. 要证明这个结论是比较简单的，因为 $\mathscr{U}$ 和 $\neg\mathscr{U}$ 是闭公式，两者必有一真，而它们又不是 $\mathscr{N}$ 中的定理，因此，必有不可证的真命题（闭公式）. 当然，这里的真意指解释真，针对我们的具体情况是算术真.

第二，读者可能会想到：$\mathscr{N}$ 的不完全是否因为选择的公理不足所致. 换言之，我们如果多选一些命题作公理，$\mathscr{N}$ 就完全了. 例如，我们将不可判定命题 $\mathscr{U}$ 补加给 $\mathscr{N}$ 作新公理，从而得一个扩充 $\mathscr{N}'$，此时 $\mathscr{N}'$ 可能就完全了，答案并非如此，因为单增加一条新公理，并不改变递归关系及其表达性，因此按相似的程序，可以在 $\mathscr{N}'$ 中找到另外一个不可判定命题 $\mathscr{U}'$，证明 $\mathscr{N}'$ 的不完全性. 这个意思可由下列命题完整地表达：

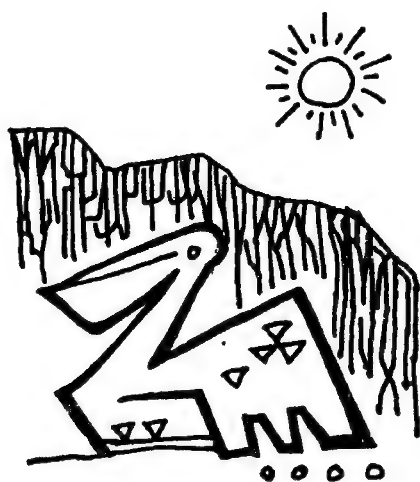
如果 S 是 $\mathscr{N}$ 的任意扩充，且 S 的特有公理的哥德尔数集是递归集，那么（在 S 是一致的假设下）S 是不完全的.

S 的特有公理的哥德尔数集是递归集，这个条件是必要的，放弃这个条件，有可能构造 $\mathscr{N}$ 的一致完全扩充. 前面我们曾经给出过构造一致的完全扩充的方法和程序. 这里我们很自然地会想

到，一方面公理的哥德尔数集为递归集时，系统是不完全的：另一方面完全的一致系统也是存在的，因而我们从中可以推得：这种完全的一致系统的公理的哥德尔数集是非递归集．这样我们就得到了一种类型的非递归集的实例．

第三，我们还要说明一点，在一阶集论 ZF 系统中，由于可以定义自然数，因此也具备不完全性．这种含自然数的一阶系统称为充分丰富的．还存在一些比较狭窄的一阶完全系统，如代数学的群论等一阶系统．

四 意 义



哥德尔关于不完全性定理的文章，犹如一块巨石，投入逻辑学的海洋，很快激起了阵阵波浪.在接着的几年中，出现了一系列与不完全性定理有着直接关联的文章和专著．这些论著考察了更为复杂的不可判定公式．除前面提到的1936年罗塞尔工作外，主要还有：1939年希尔伯特和贝尔奈斯在他们的《几何基础》中，艰苦地完成了对两个算术系统 Z_μ 和 Z 的详细证明．1934年，哥德尔在普林斯顿所作的关于不完全性定理的讲座，就以更为简洁的方式给出了1931年文章中的最重要成果．当时，他还对豪伯于1931年提到的一般递归函数给出了完全精确的形式．后来，英国逻辑学家图灵于1937年给出了完全一般的形式系统的概念；波兰逻辑学家塔斯基对不可判定的一般理论作了展开．哥德尔的文章给了能引可判定性问题以强有力的推动．当前，国际上已将哥德尔不完全性定理，塔斯基的形式语言的真理论，图灵机和判定问题，赞誉为现代逻辑科学在哲学方面的三大成果．三大成果是万千人们撼人心灵的

智力奋斗的结晶，三大成果是逻辑科学向形式科学长期演化、高度发展的产物，三大成果也是现代逻辑科学蓬勃发展的新起点，推动力．下面就不完全性定理在逻辑学、哲学、人工智能、数学方面的影响，谈些看法．

哥德尔不完全性定理既显示了形式化的巨大功能，同时也显现了形式化的局限性．前面陈述的定理证明是按严格的形式化的方式进行的，因此，可以断言没有形式化的高度发展，就不会有哥德尔定理．哥德尔第一定理确立了不可判定命题，哪怕是我们思想中最稳定的毫不含糊的自然数也不例外，我们不能用一个形式系统对它进行完全的刻划和把握．哥德尔第二定理，直接破灭了希尔伯特证明数学无矛盾性的目标．当然这并非要完全抹杀希尔伯特创造证明论的历史功绩．正如著名逻辑家塔斯基所述："称希尔伯特为元数学之父，他是当之无愧的，他创建了作为独立学科的元数学；他为它的存在而奋斗，以一个伟大数学家的威信全力地支持它；他策划出它的前进途径并寄托以重任．诚然婴儿未能实现慈父的全部希望，并未成长为一神童．但是它健康地成长了，已经成为数学大家庭的成员．"可见，我们确实应该有这样认识，尽管公理化形式化的在逻辑学、数学以及自然科学的发展中起了巨大的推动

作用，但它是有局限的，绝对地强调形式和直觉的某个方面，都可能引向认识的歧途.

其实，哥德尔获得不完全定理这样重大的结果,也是他正确把握形式和直觉的关系的结果.哥德尔在构思，证明不完全性的过程中，多方面地涉及到了形式和内容、形式和直觉之间的关系.一般来说，世界上万物皆有内容和形式. 所谓内容系指事物内在要素的总和，所谓形式乃是事物内在要素的结构和组织.内容总是某种形式的内容，形式总是某种内容的形式,作为一定内容的形式，可以成为另一种形式的内容. 我们这里想要说的形式，范围要狭窄一些. 实际上说的是逻辑，是形式化的逻辑,也可以说是一种理性认识能力.所谓直觉，一般是指一种不经过逻辑推理就直接认识真理的能力,一种认识的飞跃.可以这样说,数学直觉既是一种非理性的思维活动，即下意识的思维活动,不能归入某种现成的逻辑框架之中,又是一种不直接建立在感官感性认识之上的非经验的认识活动，当然它还是以已经获得的知识和积累的经验为基础的. 就这个意义上说，形式和直觉的关系，实际上是逻辑和直觉之间的关系，是形式的理性思维和直接的认识能力之间的关系.形式和直觉是既有区别又有联系的,既是对立的,又是在认识的实践活动中得到统一的.

在叙述哥德尔定理的历史背景时，我们曾经较为详细地陈述过逻辑的形式化进程．由亚里士多德逻辑向数理逻辑的推进，直到建立起命题演算和谓词演算的形式系统，这实际上就是逻辑的形式化进程．逻辑的形式化是传统逻辑现代化的主要途径.逻辑的形式化既吸收了数学形式化，现代化的养料，也推动了数学形式化．特别是电子计算机发明后，形式化更显示了它的威力．可以这样说，正是有了公理化、形式化，才有了传统逻辑的现代化，才有了现代的非标准逻辑的崛起.正是有了公理化、形式化的逻辑系统，才可能提出逻辑系统的完备性和不完全性等元逻辑问题，哥德尔才能借此建立起他的伟业；严格地证明不完全性定理．哥德尔本人是充分地意识到这一点的，他在评述罗素的数理逻辑一文中，第一句话就说:“数理逻辑是形式逻辑精确和完备的表述”.他还赞赏弗雷格和皮阿诺，认为弗雷格能“用思维的演算，从纯逻辑去推导出数学”．皮阿诺“创造了一套优美和灵活的符号系统，甚至能够把最为复杂的数学定理以完全精确和通常是非常简洁的方式用单个公式表达出来.”哥德尔还对罗素著作中缺乏形式的精确性表示过遗憾．哥德尔说：“遗憾的是，这一空前的、全面而彻底的关于数理逻辑的阐述，以及以它为基础的数学推导，在基

础方面是如此严重地缺乏形式的精确性，以致在这方面与弗雷格相比，显得倒退了一大步.”但是哥德尔并没有片面强调形式化的一面，他也一再强调数学直觉的重要性．这一点在完成不完全性定理以及其他逻辑方面的重要成果(完备性定理，连续统假设的一致性）的证明中体现甚为突出.

前面我们曾经介绍过1929年哥德尔获得的一阶谓词演算的完备性定理，它断言：谓词演算中的一切真公式，皆是系统中的可证公式．该定理的确立，实现了直觉上的真公式和逻辑上的可推演出的公式之间的相互转化．公式的真假，涉及到解释和模型，闭公式并不例外．谓词演算中的闭公式，从谓词逻辑的角度看就是命题．在一个解释中为真的闭公式称为解释真，此时这个解释就是公式的模型，所以也可称模型真，这是相对意义下的真；只有在一切解释中皆真的公式，才称为普效有效公式，或逻辑真公式，这是绝对意义下的真.公式是形式系统中合式公式的简称,是逻辑语形理论的研究对象，可以看作属于形式方面.解释和模型是由任意客体按一定结构组成,而任意客体当然是多种多样的,具有万千物理属性,这可以看作属于内容．要判定一个公式是否可推演出，即是否可证，这是纯形式的问题；要断言一个公式是否真（无论相对意义的还是绝对意义

的真），必定需要依赖于形式系统以外的解释和模型，有时仅需依赖单个或几个解释、模型，有时却必须依赖无限个解释、模型．于是，断言公式的真假时，所涉及的主要方面并非是形式，而往往对涉及非逻辑的、对内容的直接感性知觉能力，即直觉．就此意义上说，公式的可证性和公式的真理性之间的关系，也可以说是形式和直觉之间的关系．

哥德尔年轻时就能一举完成完备性定理和不完全性定理的证明，充分显示了他一身兼具优异的形式思维能力和杰出的直觉认识能力，并且对它们能作有机的综合运用，从而能看清公式在直觉上真和形式上可证之间密切的、相互可以作等价转换的关系以及实现转化的条件．真和可证之间的相互转化，要看相对于什么系统而言．相对于有些系统（例如一阶谓词演算），直觉上的真（逻辑真）公式，在系统中确实可证；相对于另外一些系统（例如一阶算术系统），直觉上的真（解释真）公式，在系统中却并不都可证明．前者是完备性定理的内容，后者是不完全性定理的内容．

哥德尔这方面的才能，在实施不完全性定理的证明中表现得尤为突出．我们知道，不完全性定理的证明，需要使用许多重要的新颖的基础概念，其中有些是他人刚提出的新概念，由哥德尔

本人创造的更多一些，如可表达性，哥德尔数，递归性，W——一致性等.这些概念后来或者构成了逻辑、数学新篇章，或者成了新的重要方法的基础不完全性定理的证明，需要精细而又繁复的推导.为了证明W关系等的递归性，哥德尔在文章的原稿中，详细证明了45个递归函数，这几乎构成了一门新的学科. 不完全性定理的证明，还需要在形式和直觉之间作几次转换. 把形式的表达转换为元数学中的表达，把元数学的表达再转化为纯形式表达，从而把命题的真假转换为公式的可证与不可证. 哥德尔就是这样，把自然语言的表达，形式的表达，数字的表达溶成一体，对它们作综合的分析、论证后，才得到他的结果的.

以上描述，可以用新、重、难三个字加以概括. 新，指的是观念新、思想新、方法新，整个定理的涵义本身就是崭新的，证明中用到了许多全新的概念和全新的方法. 重，指的是证明的篇幅冗长，步骤繁多. 后人述说该定理的证明，即使带有删节，也往往需要数万言. 难，指的是证明中转换、曲折多. 既要考察单个概念纵向的脉络，又要考察多种观念的横向联系. 既要区分直觉的模型、形式系统和数字表达的区别，更要把握它们之间的联系、转换换件，溶多种原料于一炉，经过把握火候的冶炼，才能获得纯钢. 新、重、

难表现了哥德尔非凡的数学才能，特别是数学直觉能力．这种对数学真理的直接洞察能力，使哥德尔对成功抱有坚定的信心．没有这种直觉上对定理的真理性的坚信，在茫茫迷途上，敢于不辞辛劳地作这样的长途跋涉，最后坚持攀登上科学的顶峰是很难想象的．哥德尔晚年回顾年轻时代获得两项重要成果的经历时曾说："应该注意，我在数学的形式系统中构造不可判定数论命题的直接试探原理，是与'可证性'相对立的'客观的数学真理'的高度超限的概念．"这里所说的直接试探原理和高度超限概念．我感到实际上就是哥德尔心目中的数学直觉．哥德尔对此是十分看重的，认为这对他在逻辑学方面的成功是基本的．

哥德尔确实是既重视形式的逻辑思维，也重视直觉的超限思维，并且能以实事求是的态度对待双方，既看到它们的区别和对立，更强调它们的联系和转化，正是这种朴素的辩证思想，促使他攀上了科学的高峰．

哥德尔定理在人工智能研究范围内，也常常被引用．而且还往往成为两种不同观点的依据．有的认为："哥德尔不完全性定理表明，即使在基本数论中也有数不清的命题是不能用这种公理化方法解决的．无论机器设计得多么好，运算得多么快，它都不能对这些问题作出回答．这一切使人

感到，人脑在认识和模拟自己方面有内在的极限．……哥德尔定理表明，人脑的能力和结构是至今任何非生命的机器所不能比拟的．”

也有人不同意这种观点，他们认为：前者“再三强调如下事实：不管给计算机以什么公理和推理规则，总有一些数学真理是不能光从这些公理和推理规则中推出来的．这一点也不错．但是他们认为当我们给机器以公理和推理规则时，我们就把相应的数学真理的观念给了机器，这是不对的．这种看法就是认为形式主义学派是对的，而实际上形式主义学派已被哥德尔证明是错的．哥德尔定理对我们自己不是一个不可超越的障碍，对计算机也不是．……正如我们对于一个不可证明的公式，能通过将这一公式所表达的内容和有关事实作比较，来认识到这一公式为真一样，计算机也会这样做．”

其次，哥德尔定理突破了数学界、逻辑学界长期形成的过分崇尚有限思维的桎梏，解放思想，开辟了逻辑科学发展的新时期．哥德尔晚年写给友人的信中曾说过：“从数学上说，完备性定理确实是斯柯兰1922年工作的最为显然的推论．但是，事实是在那个时候，没有人（包括斯柯兰本人）作出过这样的结论．

“这个逻辑学家的视而不见（或偏见）确实令

人惊异．但是我认为解释不难找到．问题主要在于，那时对元数学和非有限思维广泛地缺乏一种必要的认识论态度．

“数学界普遍认为，仅当能用有限的元数学加以‘解释’或‘论证为正确’时，才算作有意义的．（注意，对于我取得的结果和后来的工作，一般来说，用这种观点都是不可能的．）这种观点，几乎不可避免地要导致从元数学中排除非有限思维．

“最后，应该注意，我在数学的形式系统中构造不可判定数论命题的直观试探原理是与‘可证性’相对立的‘客观数学真理’的高度超限概念（这里我说明了直观性的论证，通过它我达到了不完全性定理这个结果），关于这个概念，在我的工作和塔斯基的工作之前，一般来说是混乱的，使用这个超限概念，最终也会导致有限可证的结果，如关于在一致的形式系统中不可判定命题的存在性的一般定理．

“我仍然完全相信，反对在元数学中使用非有限概念和论证，是在我之前没有由斯柯兰和任何其他人给出完备性定理证明的基本原因．”

哥德尔在信中所表达的，对于他在1929年取得完备性定理和1931年取得不完全性定理时的看法，大体可以概括如下：

1.斯柯兰在1922年已经取得完备性定理所需要的数学证明的核心结果. 如果斯柯兰和其他对此问题作过类似探讨的人们，不囿于使用有限思维，完备性定理可以作为显然的推论而得出，但是由于他们采取了排斥非有限思维的哲学态度，结果真理到了鼻尖，仍然不能发现它. 这种观点的本质是拒绝使用一切抽象的、无限对象.

2. 哥德尔在证明不完全性定理时，使用了非有限思维,在证明一阶谓词演算的完备性定理、连续统假设一致性的证明也使用了非有限思维.

哥德尔的成果，是正确处理有限与无限，潜无限与实无限关系的结果. 人类探索有限、无限由来已久,古希腊的毕达哥拉斯、德谟克利特、欧几里得、阿基米德就曾对无限提出过许多启人思迪的丰富思想. 毕达哥拉斯学派的希巴索斯提出了不可公度，接触到了无限小量的概念. 原子论者德谟克利特，第一个求出锥体体积，尽管找不到对无限小的实质究竟是什么的确切看法，固定无限小量的观念已经顽固地粘附在数学上了. 每当逻辑无济于事的时候,直观就常常会求助于它. 欧几里得的《几何原本》,看不到德谟克利特原子论的思想,穷竭法的提出者攸多克索的严肃的、讲究实际的思想的影响则十分明显. 穷竭方法的基

础原理，拿现在的眼光来看，可以说是一种潜在无限小的观念. 就某种意义来说，它阻碍了固定无限小量观念的发展. 在古代大数学家阿基米德身上，兼具了两种素质：把欧几里得一丝不苟的推演和德谟克利特带有朴素直观的想象谐和地结合在一起. 阿基米德在证明他的结果时，忠于攸多克索的具体细节，而用德谟克利特的无限小量观念去发现结果.

十七世纪牛顿、莱布尼茨发展的微积分，是沿袭了德谟克利特的原子论思想路线，使用了直观无限小观念的，而柯西、魏尔斯特拉斯承继了欧几里得的路子，排斥直观无限小. 他们通过有限量，成功地为近代分析数学奠定了基础，把希腊人曾使用过的，由牛顿、莱布尼茨用它们开创新时代的无限小量置之度外，魏尔斯特拉斯的工作，最为严格，用两个有限量 ϵ, δ 的关系，精巧地定义了无限小. 它在逻辑上是完美的，但是定义概念却比被定义概念要复杂. 按这种方式，确实消除了非有限数的引用，避免了贝克莱设置的逻辑陷阱，但是人们却要付出昂贵的代价，直觉上清晰的、物理上可以测量的瞬时速度（实在无限小），成了从属于精巧出奇的“极限”的概念. 所以这一切，在无限小研究领域中，为排除非有限思维牢固地扎下了根子. 经过数千年的曲折以

及近代数百年的论争，在无限小研究的领域中，有限思维又占据了统治地位.

对于无限的研究，除包括无限小之外，也包括无限大. 十九世纪后期，德国大数学家康托提出的超限数理论，就是无限大近代研究中获得的第一个成熟结果. 康托的理论，是从创立集合论开始的. 集合论是研究集合、集合的运算及其性质的数学分支. 它是一门与一般哲学思考相近的，并且是对有关无限的整个问题从全新的角度加以阐明的学科. 康托提出的集合论和超限数理论，被希尔伯特赞誉为"数学精神最令人惊羡的花朵，人类理智活动的一个至高成就."康托在建立他的理论时，创立了对角线方法，后来被确认是一种十分重要的数学方法. 它实际上是以反证法为基础的，它的逻辑基础是排中律，排中律对有限事物是成立的，无人置疑，但对无限事物使用排中律，就超出了有限论者可以接受的限度. 它实质上属于非有限思维范畴. 为此，尽管这些成果在数学史上是划时代的，苏联著名数学家库尔莫哥洛夫说过："康托的不朽功绩，在他敢于向无穷大冒险迈进，他对似是而非之论、流行的成见、哲学的教条、以及最大数学家信念作了内外斗争，由此使他成为一门新学科的创造者，这门学科（指集合论）今天已经成了整个数学的基础."但是康托

还是遭到猛烈而又沉重的打击. 特别是他的老师克罗内克的粗暴攻击,残酷迫害竟长达十年之久. 克罗内克等人认为: 康托关于超限数和集合论的工作不是数学, 是神秘主义, “后一代将把集合论当作一种疾病”, 超限数是“雾上之雾”, 康托的“思想是近十年来最具兽性的见解”. 在这样沉重的打击下, 他那已经十分紧张的神经终于支持不住了, 神经失常了. 由此可见, 当时数学界对非有限思维所持的排斥之深, 以及有限思维的桎梏在世纪转折时期所占统治地位的程度. 前面提到过希尔伯特是支持康托学说的, 甚至还说: “没有人能把我们从康托为我们创造的伊甸乐园中排除出去.” 但是在强大的直觉主义压力下, 在他至为重要的证明理论中, 也贯彻了有限主义立场, 可见, 当时数学思想界对有限观点已崇尚到如何的程度了. 到了哥德尔那个时代, 有限思维占据了统治地位. 数学界普遍认为, 在数学中仅当非有限思维能用有限的元数学加以“解释”或“论证为正确”时, 才能算作是有意义的. 这种局面的形成, 是人类对无限进行研究的漫长过程的结果, 冰冻三尺, 非一日之寒.

有限与无限是一对矛盾. 人们通过有限去量度、表示无限, 揭示无限的本质. 完全脱离有限去认识无限是不可能的. 有限是认识无限的必要

手段、方法. 但是，我们也不应将此片面化，绝对化，过分片面地强调有限，必将导致绝对地排斥使用非有限思维去研究、认识无限. 这种技术处理的一般化，将会在哲学上形成僵化人们思想的形而上学的桎梏，扼杀人们的聪明才智和创造发明. 斯柯兰就是吞食了这颗苦果的实例. 相反，哥德尔却敢于突破有限思维的框架，显示了他砸碎沉重枷锁的无比勇气和非凡创造力.

最后，我们来说一下哥德尔定理对数学的影响. 由于哥德尔定理的证明，运用了一些可以说是把形式化的系统纳入自身中的比较麻烦的方法，在这种意义上，构造出来的那个不可判定命题，过多地带上人为雕凿的痕迹，因而对现代数学家们眼前某些难题的不可判定性的研究，没有提供出明显的解决问题的线索. 但是，近年来，由于有限组合理论中取得的研究新成果，使得哥德尔定理的影响，似乎正在越出逻辑学、数学基础和哲学的范围，在"当代"的日常数学中苏醒过来.

1982年11月，美国科学（Science）杂志上发表了一篇短文：《哥德尔定理与数学有关吗？》，文章报道，美国曼彻斯特大学的杰夫·帕里斯和伯克利加州大学的利奥·哈林顿，以及俄亥俄州立大学的哈维·弗里德曼，相继在有限组合理论中，找到

了既不能肯定又不能否定的（关于自然数的）命题．为描述一下这个成果，需先介绍一下阿克曼函数和拉姆赛定理等内容．

阿克曼函数是用二次递归法，从原始递归函数导出的函数，它的特征是以原始递归函数所不及的速度，随着自然数n、m的增加而增加．我们用$A(m, n)$代表阿克曼函数．此时，它可以用二次递归定义如下：

$$A(0, n)=2n$$

$$A(m+1, 0)=m+1$$

$$A(m+1, n+1)=A(m, A(m+1, n))$$

这是一个带有两个变元m、n的函数，它的定义对m、n都使用了归纳．首先在m为0的场合，对n进行归纳定义

$$A(0, 0)=0$$

$$A(0, n+1)=2(n+1)$$

再考虑$m+1$的场合，对n进行的归纳定义

$$A(m+1, 0)=m+1$$

$$A(m+1, n+1)=A(m, A(m+1, n))$$

再写得具体一点，就能明确地看到它的惊人的增加趋势．

$$A(1, 0)=1$$

$$A(1, 1)=A(0,A(1,0))=A(1,1)=2\cdot 1=2$$

$$A(1,2)=A(0,A(1,1))=A(0,2)=2\cdot 2=2^2$$

$$\vdots$$

$$A\ (1,\ n)\ =2^n$$

而

$$A\ (2,\ 0)\ =2$$

$$A\ (2,\ 1)\ =A\ (1,\ A\ (2,\ 0))\ =A\ (1,\ 2)=2^{2}$$

$$A\ (2,\ 2)\ =A\ (1,\ (2,\ 1))\ =A\ (1,\ 2^2)=2^{2^{2}}$$

$$A\ (2,\ 3)\ =A(1,A(1,2))=A(1,2^{2^{2}})=2^{2^{2^{2}}}=2^{16}$$

$$A\ (2,\ 4)\ =A(1,A(2,3))=A(1,2^{16})=2^{2^{2^{2^{2}}}}\quad 2^{65536}$$

$$A(2,5)=A(1,A(2,4))=A(1,2^{65536})=2^{2^{65536}}$$

$$\vdots$$

$$A(2,n)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\}n\text{ 个}$$

$$A(3,n)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}2^n \text{个}$$

拉姆赛定理的一个相当特殊的情况是所谓的聚会问题:如果你要举行一次社交聚会,为保证你的客人中有 K 个人,或者互相认识或者互相不认识,那么这个聚会至少要有多少人参加?已经证明:

当 $K=3$时,至少要有6个人,

当 $K=4$时,至少要有18个人,

当 $K=5$时,确切的至少要有多少人尚不知晓,但只要超过55个人,相应的要求能满足.

当 $K=6$时

⋮

情况就不甚了了.

拉姆赛定理断言满足这样的要求的数是存在的,尽管还不能确切知道这个数的大小.一般的无限型拉姆赛定理是这样的:如果把一无限集合的所有 K-子集任意分成 r 类,则必有该集合的一个无限子集,它的所有 K-子集属于同一类.

所谓"大"集是指一个自然数集合,满足这样的条件:它的元素个数大于等于这个集合中的最小自然数.

例如：集合{3,15,25,26}是“大”集．因为元素个数4，大于其中的最小数3．

集合：{100,102,104,106,108}就不是“大”集，因为元素个数5小于其中的最小数100．

有了这些准备，我们可以来叙述这个不可判定命题了．

帕里斯—哈林顿命题：如果把一个“充分大”的有限的自然数集合的所有 K-子集，任意分成 r 类，则必有一个“大”的子集，它的所有 K-子集属于同一类．

帕里斯-哈林顿命题可以说是无限型拉姆赛定理的一种有限变型．问题在于这个“充分大”，至少应该有多大，需要加以确定．显然，这个界限是与 r 和 K 相关的，其实它是 r 和 K 的一个函数，而且它的函数值随 r 和 K 的增加而增加的趋势同阿克曼函数 $A(m,n)$ 差不多，从而得知帕里斯-哈林顿命题在皮阿诺算术系统中不能判定．定理的证明用了模型论方法，他们构造了算术系统的两个模型，使得命题在其中之一成立，在另一模型中不成立．后来，尽管 R·索洛维，在增强了的皮阿诺算术系统中证明了帕里斯-哈林顿定理，但弗里德曼又在增强了的系统中找到了另一不可判定命题．

这些不可判定命题与哥德尔构造的不可判定

命题是不同的，前者几乎毫无人为雕凿的痕迹．它们是直接来自“当代”的日常数学分支之一：组合数学．为此G·哥拉达断言：“看来，哥德尔定理将越出传统的数理逻辑的范围，开始对其他数学领域发生影响．”

总而言之，哥德尔不完全性定理是逻辑发展史上的里程碑，它既标志着现代逻辑科学朝形式化方向发展所达到的高峰，也标志着现代逻辑科学一个蓬勃发展的新时期的到来；哥德尔定理使人们认识到了形式化的巨大力量，同时也看到了形式化的局限；哥德尔定理也使人们认识到尽管有限是认识无限的重要手段，非有限思维还是有它的独特作用；形式和直觉，有限和无限，这些成对的范畴既是对立的又是统一的，片面地、绝对地强调任何一方，都可能导致认识的谬误；哥德尔定理不仅是逻辑学、数学基础方面的成果，而且近来已在一般的数学方面开始产生影响．可以预计，随着人类科学事业的发展，哥德尔定理在逻辑学、数学、人工智能、哲学方面的影响，将会与日俱增．

参考文献

〔1〕A. G. 汉密尔顿:《数理逻辑》,朱水林译,程其襄校,华东师范大学出版社,1986年版.

〔2〕E. Mendelson:Introduction to Mathematical Logic〔《数理逻辑引论》〕,D. Van Nostrand Company,1964.

〔3〕van Heijenoort:From frege to Gödel,a source book in mathematical logic 1879—1931,〔《从弗雷格到哥德尔,1879—1931年数理逻辑资料》〕,Cambridge press,1967.

〔4〕Hao Wang:From Mathematics to Philosophy《从数学到哲学》,Routledge & Kegan Paul 1974年版.

〔5〕王宪钧:《数理逻辑引论》,北京大学出版社,1982年版.

〔6〕莫绍揆:《数理逻辑初步》,上海人民出版社,1980年版.

〔7〕徐利治:《数学方法论选讲》,华中工学院出版社,1983年版.

〔8〕朱水林:《形式化:现代逻辑的发展》,人民出版社,1987年版.

〔9〕张家龙:《公理学、元数学与哲学》,上海人民出版社,1983年版.

〔10〕M. A. 阿尔贝勃:《大脑、机器和数学》,朱熹豪、金观涛译,吴允曾校,商务印书馆,1982年版.

〔11〕张尚水:《库尔特·哥德尔》,载杜任之主编《现代西方著名哲学家述评》续集第603—613页,生活·读书·新知三联书店,1983年版.

〔12〕王浩:《哥德尔和维特根斯坦》,李幼蒸译,载《哲学研究》,1981年3月第25—37页.

〔13〕王浩:《哥德尔的一些事迹》,朱水林译,载《世界科学》1984年6月.

人 名 索 引

希尔伯特　Hilbert,D.
纽拉特　Neurath,O
孟德尔森　Mendelson,E.
克林尼　Kleene,S. C.
克罗内克　Kronecker,L.
克莱因　Klein F. Ch.
克鲁斯卡尔　Kruskal
欧几里得　Euclid
胡塞尔　Husserl,E.
罗素　Russell,B. A. W.
罗塞尔　Rosser,J. B.
拉姆齐　Ramsey,F. P.
图灵　Turing,A. M.
帕里斯　Paris,J.
波普　Popper,K.
柏拉图　Plato
费尔马　Fermat,P. S. de
费格尔　Feigl,H.
康托　Cantor,G.
康德　Kant,I.
科恩　Cohen,P. J.
洛文海　Löwenheim,L.
柯西　Cauchy,A. L.
柏克尔特　Pockert,A
海丁　Heyting,A.
哈林顿　Harrington,L.

莱布尼茨	Leibniz, G. W.
莱奥	Liar,
诺特	Nother, A. E.
理查德	Richard, J.
策麦罗	Zermlo, E.
斯柯兰	Skolem, T. A.
笛卡尔	Descartes, R.
彭加勒	Poincare, H.
赖辛巴哈	Reichenbach, H.
塔斯基	Tarski, A.
索洛维	Solovay, R.
凯托南	Ketnen, J.
豪伯	Herbrand, J.
德谟克利特	Democritus.
薛格尔	Siegel
韩恩	Hahn, H.
魏斯曼	Waisman, F
魏尔斯特拉斯	Weierstrass, K. T. W.

后　记

哥德尔不完全性定理是现代逻辑发展史上的一座里程碑，对逻辑学、数学、哲学、人工智能具有深刻的影响。为此，笔者极愿意把它尽可能完整地介绍给我国的读者，但限于水平，错误和缺点在所难免，希望读者批评指正。承蒙应制夷教授审阅了本书第三章，谨在此表示谢意。

朱水林

1987年1月于上海社会科学院哲学研究所

作者简介

朱水林，1937年生，上海社会科学院哲学研究所研究员。1960年毕业于上海师大数学系，任助教、讲师。1979年调上海社会科学院，从事科研和研究生教学工作。研究方向：数理逻辑，现代形式逻辑，西方逻辑史，数学基础。著有《形式化：现代逻辑的发展》，《现代逻辑引论》，《对称和群》，《逻辑语义学》等及20余篇论文；译著及译文有《数理逻辑》，《社会科学在召唤数学》，《数理语言学》等，总计约200余万字。

每函十三册，总定价：90.00元

ISBN 7—5382—0179—3/G・160

定　价：7.30元








ISBN 7-5382-0179-3
9 787538 201796 >